

## Повышение достоверности диаграмм деформирования титановых сплавов

Шорр Б.Ф., Вильтер Н.П., Волков М.Е., Ханян Г.С.

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, г. Москва

e-mail: shorr@ciam.ru

Рассмотрен корректный переход от условных характеристик деформирования и разрушения образцов из титанового сплава ВТ6 к истинным с учетом статистического рассеяния механических свойств материала. Описан метод численно-аналитического определения статистических характеристик истинных параметров  $\epsilon_f$  и  $\sigma_f$  как функций случайной величины относительного сужения  $\psi$ , в том числе при ограниченных выборках. Достоверность метода подтверждена путем сопоставления рассчитанных характеристик с результатами испытаний в ЦИАМе двух групп образцов с несколько различающейся технологией изготовления и известными результатами испытаний партии из 210 образцов. Показана эффективность использования статистически минимальных значений относительного сужения  $\psi$  и истинной деформации разрушения  $\epsilon_f$  материала для контроля стабильности производства.

**Ключевые слова:** диаграмма растяжения, титановый сплав ВТ6, статистический разброс, вероятностные характеристики, выборочные испытания.

## Increasing the reliability of titanium alloys deformation diagrams

Shorr B.F., Vilter N.P., Volkov M.E., Khanyan G.S.

CIAM, Moscow

Using titanium allow VT6 as an example, the issues of obtaining practically important information from conditional and «true» tensile diagrams are discussed and ways to increase their reliability by taking into account the statistical variation of characteristics are proposed. The numerical-analytical method for determination of the probability characteristics of these parameters as functions of a random variable  $\psi$  and estimating of the minimum values  $\psi_{\min}$  and  $\epsilon_{f\min}$  from the results of sampling tests are described. Comparing the results of testing two groups of samples with a slightly different manufacturing technology, it is shown that this difference most clearly affects the magnitude of the sample relative narrowing  $\psi$  and the true parameters of fracture  $\sigma_f$  and deformation  $\epsilon_f$ .

**Keywords:** tensile diagram, titanium allow VT6, statistical variation, probability characteristics, sampling tests.

### Введение

Основным источником сведений о механических свойствах широко распространенных в авиадвигателестроении титановых сплавов являются диаграммы растяжения изготовленных из них образцов. При разрушениях от действия кратковременных нагрузок (при ударах от попадания в двигатель посторонних предметов – птиц, града, кусков льда, твердых частиц с взлетно-посадочной полосы или при пробивании корпуса двигателя оборвавшейся роторной деталью)

характеристики диаграммы растяжения непосредственно влияют на оценку прочности. Правильная оценка статических деформаций играет также существенную роль при оценке повреждений от малоциклового (МЦУ) или многоциклового (МнЦУ) усталости.

Несмотря на многолетний опыт применения диаграмм растяжения достоверность получаемой с их помощью информации остается не вполне изученной. В настоящей работе на примере титанового сплава ВТ6 рассматриваются связанные с этим вопросы и предлагаются некоторые пути их решения.

## Экспериментальные диаграммы растяжения – условные и истинные

Типичный пучок диаграмм растяжения пяти стандартных образцов из сплава типа ВТ6 представлен на рис. 1. Показаны зависимости условного растягивающего напряжения  $\sigma_0 = F/A_0$  от условной деформации  $\varepsilon_0 = \Delta l/l_0$  ( $F$  – растягивающая сила;  $A_0$  – начальная площадь круглого поперечного сечения образца;  $l_0$  – первоначальная длина базы, на которой контролируется абсолютное удлинение  $\Delta l$ ), которые определяются при перемещении с заданной постоянной скоростью одного из двух захватов испытываемого образца.

Небольшой скачок напряжения при переходе от упругой к пластической области обусловлен условиями проведения испытания (после достижения предела текучести скорость нагружения была увеличена в 10 раз) и не является значимым.

Подобные диаграммы растяжения рассматривались во многих работах, но переход от условных характеристик, отнесенных к начальному размеру образца, к истинным характеристикам, учитывающим изменение площади поперечного сечения  $A$  и длины базы  $l$  образца, требует более полного и корректного изложения. Под истинными характеристиками понимаются не локальные, а усредненные по площади действительного поперечного сечения образца значения.

На рис. 2 приведены структуры условной 0-1-2-3 и истинной 0-1-5-8 диаграмм растяжения образца из титанового сплава с выраженной шейкой. На участке нагружения до точки 2 образец растягивается равномерно по длине, причем площадь его поперечного сечения при  $\varepsilon \ll 1$  уменьшается на величину

$$\Delta A = \pi(d_0^2 - d^2)/4 = A_0[1 - (1 - \mu\varepsilon_0)^2] \approx 2\mu\varepsilon_0 A_0, \quad (1)$$

а коэффициент сужения площади поперечного сечения равен

$$\psi = \Delta A / A_0 = 2\mu\varepsilon_0, \quad (2)$$

где  $\mu$  – коэффициент поперечного сжатия (коэффициент Пуассона).

При упругих деформациях  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{0e}$  для титановых сплавов коэффициент Пуассона имеет довольно стабильное значение  $\mu_e \approx 0,3$ , при развитых пластических деформациях  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{0p}$ , когда объем тела практически не меняется, –  $\mu_p \approx 0,5$ . При нагружении по мере роста отношения  $\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_{0p}/\varepsilon_{0e}$  величина  $\mu$  возрастает в указанных пределах. Полагая полную поперечную деформацию, приводящую к изменению диаметра  $\Delta d = \varepsilon_d d_0$ , равной сумме упругой и пластической составляющей  $\varepsilon_d = -\mu\varepsilon_0 = -(\mu_e \varepsilon_{0e} + \mu_p \varepsilon_{0p})$ , получим

$$\mu(\bar{\varepsilon}_p) = (\mu_e + \mu_p \bar{\varepsilon}_p) / (1 + \bar{\varepsilon}_p). \quad (3)$$

Зависимость (3) для  $\mu_e \approx 0,3$  и  $\mu_p \approx 0,5$  показана на рис. 3 и подтверждается некоторыми экспериментами. Видно, что для  $\bar{\varepsilon}_p > 7 \dots 10$ , можно считать  $\mu \approx 0,5$ . При этом из формулы (2) следует, что при  $\varepsilon_0 \ll 1$  сужение  $\psi \approx \varepsilon_0$ , так что в момент образования шейки  $\psi_B \approx \varepsilon_B$ . Минимальное значение относительного сужения при разрушении не может быть меньше этой величины.

Истинное напряжение на участке диаграммы 1-5 равно

$$\sigma(\varepsilon_0) = \sigma_0(\varepsilon_0) \frac{A_0}{A(\varepsilon_0)} = \frac{\sigma_0(\varepsilon_0)}{1 - \psi(\varepsilon_0)} \approx \sigma_0(\varepsilon_0)(1 + \varepsilon_0). \quad (4)$$

Шейка на кривой  $\sigma_0(\varepsilon_0)$  появляется при максимальном значении условного напряжения, – пределе прочности  $(\sigma_0)_{\max} = \sigma_{B0}$ , – в точке 2 диаграммы при  $(\sigma_0)'_{\varepsilon_0} = 0$  или, согласно (4), при условии

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_0} = \sigma_0(\varepsilon_{B0}). \quad (5)$$

Как показано в ряде работ, например, [1], образование шейки связано с потерей устойчивости равномерной деформации образца.

Согласно (4) истинный предел прочности связан с условным пределом прочности соотношением

$$\sigma_B = \sigma_{B0}(1 + \varepsilon_B). \quad (6)$$

При пологом протекании кривой растяжения в области максимума условных напряжений (аналогично кривым на рис. 1) точно найти деформацию  $\varepsilon_{B0}$ , если она не фиксируется автоматически в процессе нагружения образца, затруднительно, но ввиду малости точность ее определения не является существенной.

При значительных пластических деформациях

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon_0). \quad (7)$$

Для образцов из сплава ВТ6 при пределе прочности  $\sigma_{B0} = 1000 \dots 1040$  МПа и отвечающей ему условной деформации  $\varepsilon_{B0} = 0,06 \dots 0,08$  имеет место

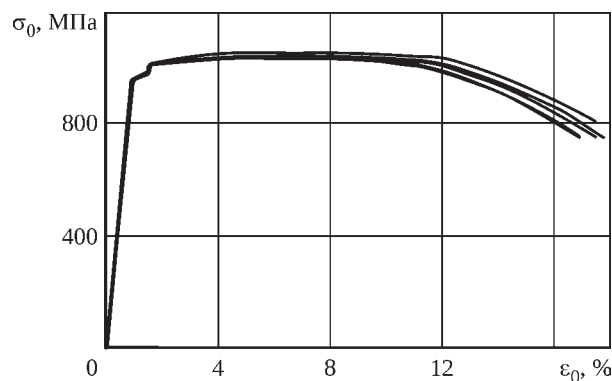


Рис. 1. Экспериментальные диаграммы растяжения образцов из титанового сплава типа ВТ6 при температуре 20°C (ЦИАМ)

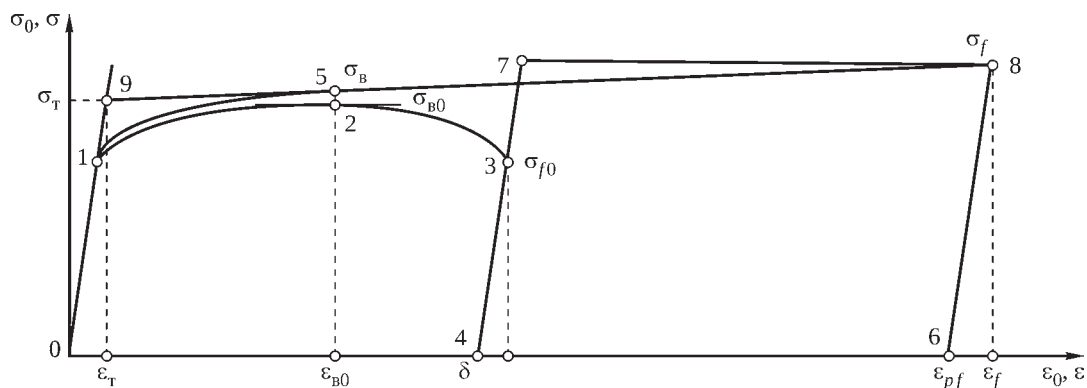


Рис. 2. Схемы условной 0-1-2-3 и истинной 0-1-5-8 диаграмм растяжения

$\varepsilon_B \approx \varepsilon_{B0}$ , что позволяет оценить повышение предела прочности по формуле (6) в среднем как  $\sigma_B / \sigma_{B0} \approx 1,07$ .

Вывод приведенных формул остается справедливым и при появлении шейки, если относить его к уменьшающейся длине базы отсчета  $l_0$  (в пределе – к малой области у минимального сечения шейки) и учитывать значительный рост пластической деформации в этой области.

Современные испытательные машины позволяют измерять растягивающую нагрузку  $F_f$  и соответствующее ей условное напряжение  $\sigma_{f0} = F_f / A_0$ , а также отслеживать изменение площади шейки  $\Delta A$  вплоть до разрыва образца. Истинное напряжение при разрыве (в точке 7 на рис. 2) равно

$$\sigma_f = \frac{F_f}{A} = \frac{\sigma_{f0}}{1 - \psi}. \quad (8)$$

В области развития шейки при  $\bar{\varepsilon}_p > 10$  коэффициент поперечного сжатия практически достигает максимального значения  $\mu \approx \mu_p = 0,5$  (см. рис. 3), соответствующего сохранению постоянного объема  $lA = l'A'$ , где  $l' = l_0(1 + \varepsilon_B)$  и  $A' = A_0(1 - \psi_B)$  – длина базы и площадь поперечного сечения образца в момент начала образования шейки при  $\varepsilon_0 = \varepsilon_B$ . При малых деформациях до момента образования шейки  $l'A' \approx l_0A_0$ , и тогда при дальнейшем развитии шейки из формулы (7) следует

$$\varepsilon_f = \ln \frac{A_0}{A} = \ln \frac{1}{1 - \psi}. \quad (9)$$

Зависимость (9) в пределах  $\psi_B < \psi < 1$  показана на рис. 4. Для металлических сплавов реальная область деформаций обычно ограничивается значениями относительного сужения  $\psi < 0,7$  и деформации при разрушении  $\varepsilon_f < 1$ . Формулами (8) и (9) определяется положение точки 8 – значения истинных параметров разрушения образца с шейкой при растяжении с постоянной скоростью деформации.

Измеряя текущие значения растягивающей силы  $F(\varepsilon_0)$  и площади  $A(\varepsilon_0)$ , можно воспроизвести всю

условную кривую деформирования  $\sigma_0(\varepsilon_0)$  и рассчитать соответствующую ей истинную кривую  $\sigma(\varepsilon)$  для данного образца на участке 5-8.

Такой подход предлагался, например, в работе [2], однако с учетом технологического разброса диаграмм деформирования (см. рис. 1) фактическое протекание одной из кривых  $\sigma(\varepsilon)$ , носящее случайный характер, малоинформативно.

С другой стороны, испытания образцов конструкционных металлических сплавов на кручение [3], в которых шейка не возникает, показывают, что зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  носит прямолинейный характер.

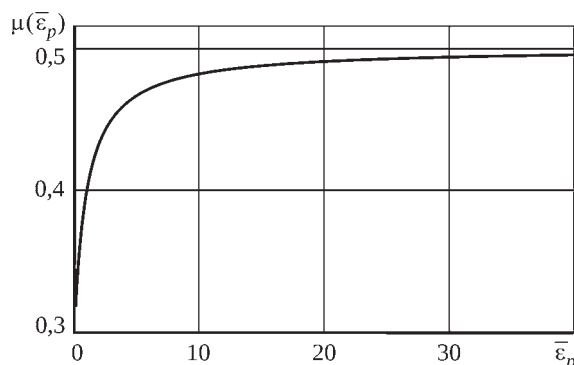


Рис. 3. Зависимость коэффициента поперечного сжатия  $\mu$  от относительной пластической деформации  $\bar{\varepsilon}_p$  при коэффициентах Пуассона  $\mu_e \approx 0,3$  и  $\mu_p \approx 0,5$

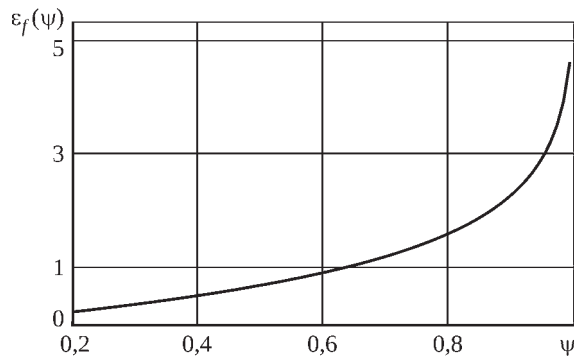
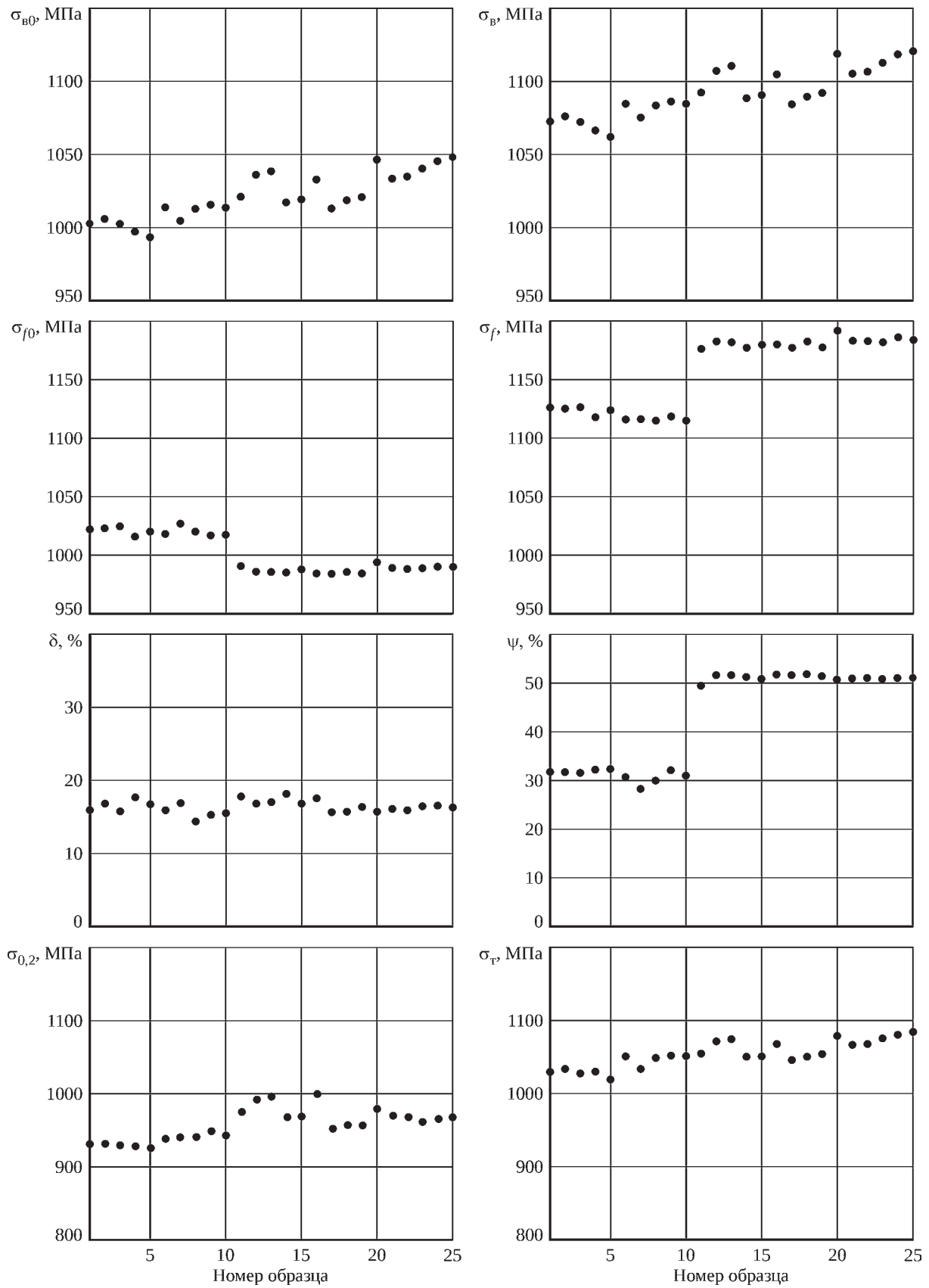


Рис. 4. Зависимость  $\varepsilon_f(\psi)$  согласно формуле (9)



**Рис. 5.** Характеристики двух групп образцов из сплава ВТ6: прочностные ( $\sigma_{B0}$ ,  $\sigma_B$ ,  $\sigma_{f0}$ ,  $\sigma_f$ ), деформационные ( $\delta$ ,  $\psi$ ) и пределы текучести ( $\sigma_{0,2}$ ,  $\sigma_T$ )

Согласно определению интенсивности при растяжении  $\sigma_i = \sigma$  и  $\varepsilon_i = \varepsilon$ , поэтому кривую 0-1-5-8 с прямолинейным участком 5-8 может рассматривать как достаточно достоверную характеристику деформирования и разрушения материалов с шейкой, в частности сплава ВТ6.

При развитых пластических деформациях  $\varepsilon_i \approx \varepsilon_p$  фактическое протекание кривой на переходном участке 1-5 слабо влияет на условие разрушения в точке 8, поэтому удобно представить обобщенную диаграмму деформирования билинейной моделью в виде двух прямых ветвей 0-1-9 и 9-5-8 с расчетным пределом текучести  $\sigma_T$  в точке их пересечения. В этом случае касательный модуль  $E_T$  и предел текучести  $\sigma_T$  определяются формулами

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\sigma_f - \sigma_B}{\varepsilon_f - \varepsilon_B}; \quad (10)$$

$$\sigma_T = \frac{E(\sigma_f \varepsilon_B - \sigma_B \varepsilon_f)}{\sigma_f - \sigma_B - E(\varepsilon_f - \varepsilon_B)}. \quad (11)$$

При  $\sigma_f = \sigma_B$  (идеальная пластичность)  $E_T = 0$ ,  $\sigma_T = \sigma_f$ . При  $E_T \ll E$  величину  $E_T$  можно отождествлять с модулем пластичности

$$E_p = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = \frac{E_T E}{E - E_T}. \quad (12)$$

### Пример обработки диаграмм деформирования двух групп образцов из сплава ВТ6

Проиллюстрируем указанный подход на примере обработки диаграмм деформирования двух групп образцов из сплава ВТ6, испытания которых были проведены в ЦИАМе. В первую группу входили образцы с номерами 1–10, во вторую группу, несколько отличающуюся технологией изготовления, – с номерами 11–25.

На рис. 5 приведены как непосредственно измеренные, так и рассчитанные по ним характеристики для каждого образца: условный  $\sigma_{B0}$  и соответствующий ему истинный  $\sigma_B$  пределы прочности; условное  $\sigma_{f0}$  и истинное  $\sigma_f$  напряжение при разрыве; относительное удлинение  $\delta$  и относительное сужение шейки при разрыве  $\psi$ ; условный  $\sigma_{0,2}$  и расчетный  $\sigma_T$  пределы текучести.

Из рассмотрения этих диаграмм, относящихся к идентичным условиям испытаний, следует:

- внутри каждой группы присутствует случайный разброс параметров, связанный с технологическими отклонениями при изготовлении и термомеханической обработке заготовок, из которых вырезаны образцы;
- различие в технологии изготовления двух групп образцов практически не сказалось на относительном удлинении  $\delta$ , заметно повлияло на условные значения

$\sigma_{B0}$ ,  $\sigma_{f0}$  и сильно повлияло на величину относительного сужения  $\psi$  и истинные параметры разрушения  $\sigma_f$  и деформирования  $\varepsilon_f$ ;

– сужение шейки (при увеличении параметра  $\psi$ ) и связанное с этим падение условного напряжения при разрыве  $\sigma_{f0}$  не указывает на уменьшение истинных прочностных характеристик материала, которые при этом, наоборот, возрастают;

– увеличение истинной деформации разрушения  $\varepsilon_f$ , сопровождающееся ростом истинного разрушающего напряжения  $\sigma_f$ , свидетельствует о повышении прочности материала, что подтверждает правомочность использования величины  $\varepsilon_f$  в качестве критерия прочности.

Измеренное падение модуля упругости образцов второй группы на ~4% сопровождалось повышением пределов текучести и прочности на ~4 и ~2,5%, соответственно, поэтому сам по себе модуль упругости не может считаться прочностной характеристикой.

На рис. 6 показано изменение касательного модуля  $E_T$ , определенного графически по исходным кривым на рис. 1, а не по изложенной выше методике.

Отличие расчетного значения предела текучести билинейной модели  $\sigma_T$  от условного предела текучести  $\sigma_{0,2}$  (см. рис. 5) достигает 8...12%, что надо принимать во внимание при подготовке расчетных моделей.

Простейший способ учета случайного технологического разброса характеристик материала заключается в том, что расчеты проводятся при их крайних возможных значениях, определяемых по испытаниям нескольких образцов, а при отсутствии экспериментов – по значениям, указанным в ТУ на данный материал. Иногда предполагается, что прочностные и деформационные свойства действуют на условия разрушения в противоположных направлениях. Из представленных данных видно, что к этому предположению следует относиться с осторожностью.

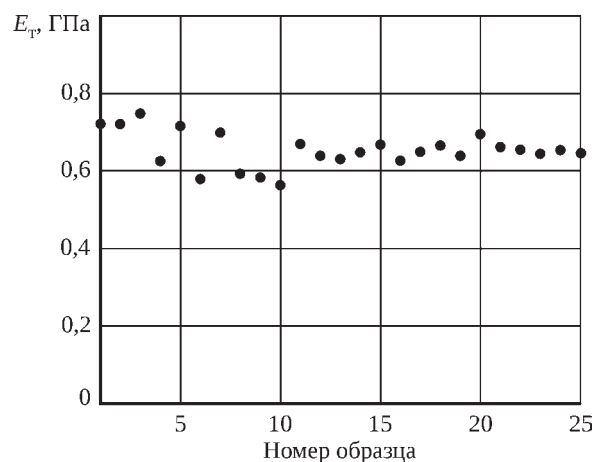


Рис. 6. Касательный модуль для двух групп образцов из сплава ВТ6

## Численно-аналитическое определение статистических характеристик сплава ВТ6

Предположим вначале, что испытаниями получена достаточно большая (теоретически бесконечно большая) выборка номинально идентичных образцов, по которой могут быть установлены законы распределения случайных величин – рассмотренных выше параметров диаграмм растяжения, и определены их статистические характеристики – математическое ожидание (среднее значение) и среднеквадратическое отклонение (СКО). Одной из таких случайных величин будет относительное сужение  $\psi$  с плотностью распределения  $f_\psi(x)$ .

В ряде работ (например, [4]) было установлено, что рассеяния характеристик материалов, относящихся к их прочности и деформации, имеют распределения, близкие к нормальному, в то время как относящиеся к длительности процессов в часах или циклах – к логарифмически нормальному. Это дает основание считать распределение  $f_\psi(x)$  нормальным со средним значением  $m_\psi$  и СКО  $s_\psi$ .

В работе [5] по результатам испытаний 210 образцов из дискового титанового сплава получены гистограммы свойств материала, в том числе относительного сужения  $\psi$ , для которого было показано, что его распределение подчинится нормальному закону с доверительной вероятностью 0,957. Статистические характеристики  $m_\psi$ ,  $s_\psi$  и коэффициент вариации  $v_\psi = s_\psi / m_\psi$  для этого сплава по данным [5] приведены в первой строке табл. 1. В столбцах  $z = 210$  указаны крайние значения  $\psi$  по данным гистограммы.

Обычно значения коэффициента вариации прочностных характеристик образцов из титановых сплавов не превышают 0,1. В данном случае большая величина коэффициента вариации и вызванный ей разброс характеристик, возможно, связаны с недостаточной отлаженностью технологического процесса изготовления образцов или с неточностью измерений относительного сужения.

Удаление от центра рассеяния на три СКО (на величину  $3s_\psi$ ) обычно считается достаточным для получения достоверного экстремального значения случайной величины.

Минимальная и максимальная величины коэффициента сужения

$$\begin{aligned} \psi_{\min} &= m_\psi - 3s_\psi; \\ \psi_{\max} &= m_\psi + 3s_\psi \end{aligned} \quad (13)$$

приведены в табл. 1 в столбцах « $-3s$ » и « $+3s$ » соответственно.

Диапазон значений  $\psi_{\max} - \psi_{\min} = 6s_\psi$  несколько перекрывает замеренный в [5] разброс относительных сужений даже при большом числе образцов.

При расчетах на прочность существенное значение имеют минимальные прочностные свойства материала, в частности,  $(\varepsilon_f)_{\min}$  и  $(\sigma_f)_{\min}$ , но при сопоставлении результатов расчетов с данными единичных испытаний надо рассматривать весь диапазон возможных значений характеристик.

Во второй и четвертой строках табл. 1 приведены значения  $(\varepsilon_f)_{\min}^*$ ,  $(\varepsilon_f)_{\max}^*$  и  $(\sigma_f)_{\min}^*$ ,  $(\sigma_f)_{\max}^*$ , рассчитанные по формулам (9) и (8) при подстановке в них средних и экстремальных значений  $\psi$ . Так как величина  $\sigma_{f0}$  неизвестна, определялось отношение  $(\sigma_f / \sigma_{f0})^*$ .

Для более точной оценки этих параметров необходимо найти законы распределения  $f_\varepsilon(x)$  и  $f_\sigma(x)$  случайных величин  $\varepsilon_f$  и  $\sigma_f$ , соответственно. Предположения для этого могут служить изображенная на рис. 4 зависимость по формуле (9) и установленный в работе [5] нормальный закон распределения случайной величины  $\psi$ :

$$f_\psi(x) = \frac{1}{s_\psi \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m_\psi)^2}{2s_\psi^2}\right). \quad (14)$$

Согласно теореме о преобразовании случайной величины по закону  $\eta = \eta(\xi)$  или  $y = y(x)$  плотности распределения вероятностей исходной  $\xi$  и преобразованной  $\eta$  случайных величин связаны соотношением

$$f_\eta(y) = \left| \frac{dx(y)}{dy} \right| f_\eta[x(y)], \quad (15)$$

где  $x(y)$  – функция, обратная  $y(x)$ .

Применительно к преобразованию (9) и закону (14) (в которых под  $\xi$  подразумевается коэффициент

Таблица 1. Статистические характеристики образцов из титанового сплава ВТ6 [5]

Случайная величина $\phi$	Среднее значение $m_\phi$	СКО $s_\phi$	Коэффициент вариации $v_\phi$	Минимальное значение $\phi_{\min}$		Максимальное значение $\phi_{\max}$	
				$-3s$	$z = 210$	$+3s$	$z = 210$
$\psi$	33,8%	5,07%	0,150	18,6%	21,3%	49,0%	45,7%
$\varepsilon_f^*$	41,2%	–	–	20,6%	24,0%	67,3%	61,1%
$\varepsilon_f$	41,5%	7,72%	0,186	18,4%	–	64,6%	–
$(\sigma_f / \sigma_{f0})^*$	1,511	–	–	–	1,271	–	1,842

сужения  $\psi$ , а под  $\eta$  – истинная деформация разрушения  $\varepsilon_f$ ) это приводит к плотности распределения

$$f_\varepsilon(y) = \frac{1}{s_\psi \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[1 - \exp(-y) - m_\psi]^2}{2s_\psi^2} - y\right). \quad (16)$$

На рис. 7 показаны графики плотностей распределения (14) и (16), построенные для взятых из табл. 1 относительных значений  $m_\psi = 0,338$  и  $s_\psi = 0,0507$  при изменении  $\psi$  и  $\varepsilon_f$  в следующих интервалах:  $x_0 = 0,125 < \psi < 0,545 = x_{100}$  с шагом  $\Delta x = 0,0042$  и  $y_0 = 0,125 < \varepsilon_f < 0,805 = y_{100}$  с шагом  $\Delta y = 0,0068$ .

Из сопоставления функций распределения видно, что их статистические характеристики заметно отличаются. Кривая  $f_\varepsilon(y)$  по отношению к кривой  $f_\psi(x)$  смещена вправо, выглядит более пологой и несколько асимметрична. Но при этом необходимо учитывать, что диапазоны возможного изменения случайных относительных величин  $\psi$  и  $\varepsilon_f$  различны:  $\varepsilon_{B0} < \psi < 1$ , а деформация  $\varepsilon_f$  ограничена только снизу  $\varepsilon_f > \varepsilon_B$  и может достигать и даже превышать единицу.

Аналитически рассчитать среднее значение и величину СКО функции  $f_\varepsilon(y)$  затруднительно (моменты распределения вероятностей (16) выражаются через вырожденную гипергеометрическую и другие специальные функции), поэтому эти величины вычислены численно путем интегрирования кривой  $f_\varepsilon(y)$  в указанном выше диапазоне  $y_k = \varepsilon_{fk}$  по расчетным формулам определения первого  $M_1$  и второго  $M_2$  моментов:

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{k=1}^{100} y_k f_\varepsilon(y_k) \Delta y; \\ M_2 &= \sum_{k=1}^{100} y_k^2 f_\varepsilon(y_k) \Delta y; \\ m_\varepsilon &= M_1; \quad s_\varepsilon = \sqrt{M_2 - M_1^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассчитанные значения  $m_\varepsilon \approx 0,415$  (что весьма близко к вычисленному непосредственно по формуле (9)

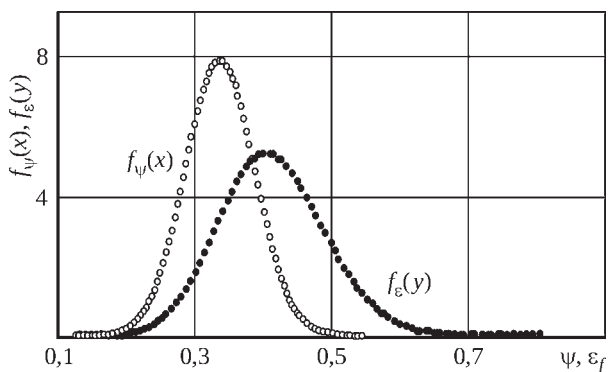


Рис. 7. Графики плотностей распределения  $f_\psi(x)$  и  $f_\varepsilon(y)$  случайных величин  $\psi$  и  $\varepsilon_f$

значению 0,412),  $s_\varepsilon \approx 0,077$  и  $v_\varepsilon = s_\varepsilon / m_\varepsilon \approx 0,186$  внесены в табл. 1 вместе с  $(\varepsilon_f)_{\min} = m_\varepsilon - 3s_\varepsilon \approx 0,184$  и  $(\varepsilon_f)_{\max} = m_\varepsilon + 3s_\varepsilon \approx 0,646$ . Выраженный в коэффициентах вариаций  $v_\psi$  и  $v_\varepsilon$  разброс истинной деформации разрушения  $\varepsilon_f$  получился на 24% больше, чем у коэффициента сужения  $\psi$ .

Оценки показывают, что коэффициенты вариации отношения  $\sigma_f / \sigma_{f0}$  и напряжения  $\sigma_f$  существенно ниже, чем  $v_\varepsilon$ , и учет разброса  $\sigma_f$  имеет меньшее практическое значение.

## Статистические характеристики сплава ВТ6 при ограниченных выборках

Фактические испытания проводятся на ограниченном количестве однотипных образцов, что позволяет найти только выборочные значения механических характеристик материалов. При числе образцов, равном  $z$ , средняя выборочная величина случайной величины  $\psi$  равна

$$m_{\psi,z} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^z \psi_k, \quad (18)$$

а выборочное СКО

$$s_{\psi,z} = \sqrt{\frac{1}{z-1} \sum_{k=1}^z (\psi_k - m_{\psi,z})^2}. \quad (19)$$

Согласно работам [6, 7], статистически минимальное значение случайной величины  $\psi_{\min}$  зависит от числа образцов в выборке  $z$ , выборочных значений средней величины  $m_{\psi,z}$  и СКО  $s_{\psi,z}$  (или выборочной вариации  $v_{\psi,z}$ ), а также двух вероятностных характеристик – уровня значимости  $q$  и доверительной вероятности  $\gamma$ , обеспечивающих выполнение условия

$$P[P(\psi_{\min} \leq \psi) \geq p = 1 - q] = \gamma. \quad (20)$$

Уравнение (20) указывает, что с вероятностью, не меньшей  $p$ , величина  $\psi_{\min}$  будет не больше любого значения  $\psi$ , причем достоверность такой оценки имеет вероятность  $\gamma$ . Значение  $\psi_{\min}$ , удовлетворяющее условию (20), может быть представлено в виде

$$\psi_{\min} = m_\psi [1 - \kappa_t(p, \gamma, z) v_\psi], \quad (21)$$

где  $\kappa_t(p, \gamma, z)$  – односторонние толерантные коэффициенты, зависящие от характера распределения случайной величины  $\psi$  и параметров  $p$ ,  $\gamma$ ,  $z$ . Таблицы значений  $\kappa_t(p, \gamma, z)$  для нормального распределения представлены в [8].

Применительно к механическим характеристикам материала рациональные значения  $p$  и  $\gamma$  должны удовлетворительно описывать, по крайней мере, следующие два свойства [9]:

**Таблица 2.** Статистически и выборочно минимальные значения  $\psi_{\min}$  и  $(\varepsilon_f)_{\min}$  при разных выборках

Номер выборки	Число образцов $z$	Среднее в выборке, %	Коэффициент вариации	$\psi_{\min}$ , %		$(\varepsilon_f)_{\min}$ , %	
				Статистич.	Выборочн.	Статистич.	Выборочн.
1	15	51,05	0,011	48,84	49,35	67,01	68,30
2	10	51,13	0,013	48,05	49,07	65,50	67,47
3		51,13	0,007	49,51	50,05	68,35	69,41
4		50,90	0,012	48,23	49,11	65,83	67,55
5		51,06	0,013	48,00	49,01	65,39	67,36
6		50,93	0,012	48,10	49,03	65,58	67,40
7		5	50,90	0,017	44,92	48,24	59,64
8	51,36		0,007	48,81	50,23	66,96	69,77
9	50,89		0,002	50,12	50,55	69,59	70,42
10	50,96		0,018	44,80	48,22	59,42	65,82
11	51,08		0,006	48,87	50,10	67,07	69,51
12	50,69		0,016	45,36	48,23	60,44	66,01
13	51,37		0,005	49,48	50,53	68,29	70,38
14	51,00		0,018	44,65	48,18	59,15	65,74
15	50,73		0,016	45,29	48,31	60,31	65,99

– при очень большом числе образцов в выборке ( $z > 100$ ) минимальное значение  $\psi_{\min}$  должно достаточно близко совпадать со значением по правилу «трех сигм», т.е.  $\kappa_t \approx 3$ ;

– минимально допустимое число образцов в выборке должно быть таким, чтобы статистически вероятное значение  $\psi_{\min}$  оставалось больше некоторого предельного значения  $\psi_{\lim}$ ; величиной  $\psi_{\lim}$  может служить указанное в ТУ на сплав нижнее значение  $\psi$ ; если оно не задано, следует учитывать, что  $\psi_{\lim}$  должно быть заведомо больше величины  $\psi \approx \delta$ ; для титановых сплавов  $\psi_{\lim} \approx 10...12\%$ .

Вблизи от центра рассеяния представим функцию  $\kappa_t(p, \gamma, z)$  приближенно в том же виде, как в работе [9] для нормального распределения при  $p = 0,995$  и  $\gamma = 0,95$ :

$$\kappa_t(p, \gamma, z) \approx 3 \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^2. \quad (22)$$

Для  $z = 210$  и данных табл. 1 это дает статистически вероятное значение  $\psi_{\min} = 18,3\%$ , что меньше выборочного значения  $21,3\%$ , и оценку  $\varepsilon_f = 20,2\%$  с запасом  $2,4\%$  по отношению к расчетному по правилу «трех сигм».

Если вернуться к полученной в ЦИАМе выборке из  $z = 15$  образцов с номерами 11...25, результаты испытания которых приведены выше, то для нее

$m_\psi = 51,05\%$  и  $s_\psi = 0,57\%$ , и, следовательно,  $\psi_{\min} = 48,84\%$  и  $\varepsilon_f = 67,01\%$ . В данном случае минимальное выборочное значение коэффициента сужения  $\psi_{\min}$  при 15-ти образцах случайно практически совпало с предельной величиной  $\psi_{\min} = 49,4\%$ , вычисленной по формуле (21) при  $\kappa_t = 3$ .

Для иллюстрации применения формулы (22) для меньших выборок сформируем из массива  $z = 15$  несколько случайных выборок с  $z = 5$  и  $z = 10$  и определим для них  $\psi_{\min}$  и  $\varepsilon_f$ . Результаты расчета статистических и измеренных значений характеристик для сформированных выборок приведены в табл. 2.

Статистически минимальные значения параметров при малом числе образцов  $z = 5$  дают большинство оценок  $\psi_{\min} < 48,8\%$  и  $\varepsilon_f < 67,0\%$ , т.е. с запасом по условиям разрушения, в то время как выборочные значения параметров, в основном, превышают эти оценки. По мере увеличения объема выборки, и те, и другие оценки становятся более стабильными и при  $z = 10$  мало отличаются от значений при  $z = 15$ .

## Заключение

На основе корректного перехода от условных характеристик деформирования и разрушения образцов из титанового сплава ВТ6 к истинным характеристикам и сопоставления результатов испытаний двух групп



образцов с несколько различающейся технологией изготовления показано, что различие технологий изготовления практически не сказалось на относительном удлинении  $\delta$ , заметно повлияло на условные значения пределов прочности  $\sigma_{в0}$ ,  $\sigma_{f0}$  и сильно повлияло на величину относительного сужения  $\psi$  и истинные параметры разрушения  $\sigma_f$  и деформирования  $\varepsilon_f$ .

Сужение шейки (при увеличении параметра  $\psi$ ) и связанное с этим падение условного напряжения при разрыве  $\sigma_{f0}$  не указывает на уменьшение истинных прочностных характеристик материала, которые при этом могут возрасти.

Увеличение истинной деформации разрушения  $\varepsilon_f$ , сопровождающееся ростом истинного разрушающего напряжения  $\sigma_f$ , свидетельствует о повышении прочности материала. Это подтверждает правомочность использования величины  $\varepsilon_f$  как критерия прочности материала.

Падение модуля упругости для образцов второй группы сопровождалось повышением пределов текучести и прочности, поэтому сам по себе модуль упругости не может считаться прочностной характеристикой.

Описан метод численно-аналитического определения статистических характеристик истинного параметра деформирования  $\varepsilon_f$  как функции случайной величины относительного сужения  $\psi$ . Коэффициент вариации  $\varepsilon_f$  в данном случае получился на 24% выше коэффициента вариации величины  $\psi$ .

Предложен приближенный вероятностно-статистический метод оценки минимальных значений  $\psi_{\min}$  и  $\varepsilon_f$  по результатам выборочных испытаний образцов.

Показано приложение изложенных методов к повышению достоверности определения характеристик деформирования и разрушения образцов из титанового сплава ВТ6.

## Литература

1. Воробьев Е.В. Особенности шейкообразования при низкотемпературной прерывистой текучести металлов. Осесимметричная деформация // Проблемы прочности, № 3. 2008. С. 92–99.
2. Кирсанов А.Р., Кузьмин М.В. Описание модели разрушения материала рабочих лопаток вентилятора // Научный вестник ГосНИИГА, № 4. 2014. С. 62–67.
3. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Машиностроение, 1974. Ч. 2. 368 с.
4. Козлов Л.А., Халатов Ю.М. Применение статистических методов к определению вибронпряженности лопаток турбомашин и оценки их надежности // Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс: изд-во Республиканского института научно-технической информации и пропаганды, 1968.
5. Темис Ю.М., Мисюрко В.М. Циклическая долговечность диска компрессора с учетом разброса механических свойств материала // Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении. Вып. 4, Труды ЦИАМ № 1237, 1989. С. 203–212.
6. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1965. 632 с.
7. Биргер И.А. Вероятность разрушения, запасы прочности и диагностика // Проблемы механики твердого деформируемого тела. Сборник науч. трудов. Л.: Судостроение, 1970. С. 71–82.
8. Оуэн Д.Б. Сборник статистических таблиц. АН СССР. 1966. 586 с.
9. Шорр Б.Ф., Локштанов Е.А., Халатов Ю.М. Об одном возможном подходе к вероятностной оценке вибрационной прочности деталей турбомашин // Проблемы прочности, № 11. 1972. С. 11–14.

## References

1. Vorob'ev E.V. Osobennosti sheikoobrazovaniia pri nizkotemperaturnoi preryvistoi tekuchesti metallov [Necking feature at low-temperature intermittent yielding of metal]. Osesimmetrichnaia deformatsiia. Problemy prochnosti [Axially symmetrical deformation. Strength problems], No. 3. 2008. P. 92–99.
2. Kirsanov A.R., Kuz'min M.V. Opisanie modeli razrusheniia materiala rabochikh lopatok ventilatora [Fracture model description of rotor fan blade material]. Nauchnyi vestnik GosNIIGA [GosNIIGA scientific bulletin], No. 4. 2014. P. 62–67.
3. Fridman Ia.B. Mekhanicheskie svoistva metallov [Metal mechanical properties]. Third edition, Part 2. Moscow: Mashinostroenie, 1974. 368 p.
4. Kozlov L.A., Khalatov Iu.M. Primenenie statisticheskikh metodov k opredeleniiu vibronapriazhennosti lopatok turbomashin i otsenki ikh nadezhnosti [Statistical methods application for vibro-intensity determination of turbo-machine blades and its reliability estimation]. Problemy nadezhnosti v stroitel'noi mekhanike [Reliability problems

- 
- in structural mechanics]. Vil'nius: Respublikanskogo instituta nauchno-tehnicheskoi informatsii i propagandy publ, 1968.
5. Temis Iu.M., Misiurko V.M. Tsiklicheskaia dolgovechnost' diska kompressora s uchetom razbroza mekhanicheskikh svoystv materiala [Cyclic life of compressor disk taking into account a dispersion of material mechanical properties]. Problemy prochnosti i dinamiki v aviadvigatelestroenii [Problems of strength and dynamics in aircraft engine industry]. Issue 4. Trudy TsIAM, No. 1237, 1989. P. 203–212.
  6. Uilks S. Matematicheskaya statistika [Mathematical statistics]. Moscow: Nauka publ., 1965. 632 p.
  7. Birger I.A. Veroiatnost' razrusheniia, zapasy prochnosti i diagnostika [Probability of fracture, safety factors and diagnostics]. Problemy mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela [Problems of deformable solid mechanics]. Leningrad: Sudostroenie publ., 1971. P. 71–82.
  8. Ouen D.B. Sbornik statisticheskikh tablits [Book of statistical tables]. AN SSSR. 1966. 586 p.
  9. Shorr B.F., Lokshtanov E.A., Khalatov Iu.M. Ob odnom vozmozhnom podkhode k veroiatnostnoi otsenke vibratsionnoi prochnosti detalei turbomashin [About one possible approach to probability estimation of turbomachine detail vibration strength] Problemy prochnosti [Strength problems], No. 11. 1972. P. 11–14.