

## К определению динамического модуля упругости металлических сплавов

Шорр Б.Ф., Бортников А.Д., Руденок Е.С., Воробьев С.В.

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, г. Москва

e-mail: adbortnikov@ciam.ru

Проведены сравнительные экспериментально-расчетные исследования динамического модуля упругости металлических сплавов для выявления наиболее надежного способа его определения: по скорости распространения ультразвуковых волн в материале, по частоте резонансных и затухающих колебаний консольно закрепленного образца и по частоте колебаний подвешенного на нитях образца после импульсного воздействия. Расчеты проводили аналитически и по конечно-элементным 3D-моделям образцов обратным методом последовательных приближений, варьируя значения модуля упругости до совпадения расчетных и экспериментальных частот колебаний. Показано, что на точность определения динамического модуля упругости значительно влияют условия возбуждения колебаний, способы закрепления образца и технологический разброс размеров. Погрешность определения при нормальной температуре может достигать  $\pm 10\%$ . Наиболее надежным оказался способ определения динамического модуля упругости по спектру колебаний подвешенного на нитях образца. В связи с появлением противоречивых публикаций проведено сравнение модулей упругости, определенных динамическим и статическим методами испытаний. Подтверждено, что для исследованных сплавов на основе титана (ВТ6Л) и алюминия (Д16) динамический модуль упругости при нормальной температуре несколько выше статического.

**Ключевые слова:** динамический модуль упругости, статический модуль упругости, метод испытаний, метод расчета, ультразвук, резонанс, импульс

## On determining the dynamic modulus of elasticity of metal alloys

Shorr B.F., Bortnikov A.D., Rudenok E.S., Vorobyov S.V.

CIAM, Moscow

Comparative experimental and computational research have been carried out to identify the most reliable method of determining the dynamic modulus of elasticity of metal alloys: by the speed of propagation of ultrasonic waves in the material, by the frequency of resonant and decaying vibrations in a cantilevered specimen, and by the frequency of vibrations in a specimen suspended on threads after pulsed impact. Calculations have been carried out analytically and using 3D finite element models of specimens by the inverse method of successive approximations, varying the values of the elastic modulus until calculated and experimental vibration frequencies coincide. It is demonstrated that the vibration excitation conditions, specimen fastening methods, and manufacturing tolerances have a significant effect on accuracy of the dynamic modulus of elasticity determining. At normal temperature, the determination error can reach  $\pm 10\%$ . The method of determining the dynamic modulus of elasticity using a vibration spectrum of a specimen suspended on threads turned out to be the most accurate one. A comparison of elastic modulus obtained by dynamic and static test methods has been performed due to the appearance of contradicting publications. It is confirmed that the dynamic modulus of elasticity at normal temperature is slightly higher than the static one for the studied alloys based on titanium (VT6L) and aluminum (D16).

**Keywords:** dynamic modulus of elasticity, static modulus of elasticity, method of testing, method of calculation, ultrasonic, resonance, impulse

## Введение

Одной из важнейших характеристик конструкционных материалов является динамический модуль упругости. В авиадвигателестроении динамический модуль упругости используют при проектировании, в расчетном анализе собственных частот и форм колебаний лопаток с целью их отстройки от резонансных частот. Для ряда конструкций, в которых экспериментальное определение переменных напряжений путем тензометрирования затруднено, надежность подтверждают резонансно-циклическими испытаниями на режимах, где ожидаются повышенные переменные напряжения. Указанные режимы выявляют путем расчета частотных характеристик, для чего также необходимо достаточно достоверно знать динамический модуль упругости.

Различают динамический модуль упругости, определяемый при скоростном нагружении, и статический модуль, определяемый по диаграммам деформирования при медленном нагружении. В неметаллических материалах, в частности в бетонах, динамический модуль может превышать статический более чем в два раза [1]. Для конструкционных металлических сплавов, применяемых в машиностроении, различие модулей при нормальной температуре не так значительно, но с повышением температуры при определении статического модуля упругости по диаграммам деформирования влияние ползучести требуется учитывать.

В справочниках по конструкционным материалам обычно приводят данные об усредненных значениях модулей упругости, но зачастую без указания способа их определения и данных о разбросе.

В работе [2] приведены результаты расчетно-экспериментального определения динамического модуля упругости дюралюминия, а в работе [3] – титанового сплава ОТ-4, на тонких пластинах со сравнительно низкой частотой изгибных колебаний, в диапазоне 2,7...73,7 Гц. На основании этих испытаний авторы сделали вывод о том, что динамический модуль указанных сплавов ниже статического, что противоречит известной теории.

В связи с практической важностью надежного определения динамического модуля упругости и возникшим расхождением в представлениях о различии динамического и статического модулей в ЦИАМ были проведены эксперименты по определению несколькими способами динамического и статического модулей упругости титанового (ВТ6Л) и алюминиевого (Д16) сплавов, в том числе с учетом разброса физико-механических свойств материалов, а также выполнен теоретический анализ возможных причин расхождения результатов экспериментов.

## Статический и динамический модули упругости

В одномерных задачах механики сплошных сред под модулем упругости ( $E$ ) понимают отношение приращения нормального напряжения ( $\sigma$ ) к приращению упругой деформации ( $\epsilon_e$ ):

$$E = d\sigma / d\epsilon_e. \quad (1)$$

Модуль упругости материала зависит от многих факторов, прежде всего от химического состава материала, термомеханической обработки, температуры. На экспериментально определяемую величину модуля упругости влияют способы нагружения и закрепления образца и другие условия испытаний. Применительно к конкретным задачам модуль упругости материала можно рассматривать постоянным в некотором диапазоне параметров или меняющимся по определенному закону. Для решения практических задач машиностроения, включая обеспечение прочности авиационных двигателей, большое значение имеет скорость деформирования конструкции ( $\dot{\epsilon}$ ), которую приходится рассматривать в очень широком диапазоне: от  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  при постепенном выходе двигателя на режим до  $\dot{\epsilon} = 10^4 \text{ с}^{-1}$  и выше при вибрации узлов. Для расчетов в первом случае используют статический модуль упругости, во втором – динамический.

Тот и другой модуль можно определять различными экспериментальными методами, которые частично рассмотрены в настоящей работе применительно к образцам из титанового и алюминиевого сплавов. Имея в виду использование динамического модуля упругости при расчете собственных частот и форм колебаний деталей двигателей, размеры образцов выбирали такими, чтобы их первая собственная частота колебаний независимо от метода испытаний была достаточно высокой, не менее 100 Гц.

## Экспериментально-расчетное определение динамического модуля упругости образцов

В технической литературе изложен ряд методов, позволяющих определить динамический модуль упругости материалов разного типа (см., например, [4–8]). В одних работах используют различные способы возбуждения резонансных колебаний в образцах и по полученным частотам аналитическим или численным методом определяют соответствующие им значения динамического модуля упругости. Другим направлением является возбуждение в образцах упругих волн и вычисление динамического модуля упругости по полученным экспериментальным значениям скорости распространения таких волн.

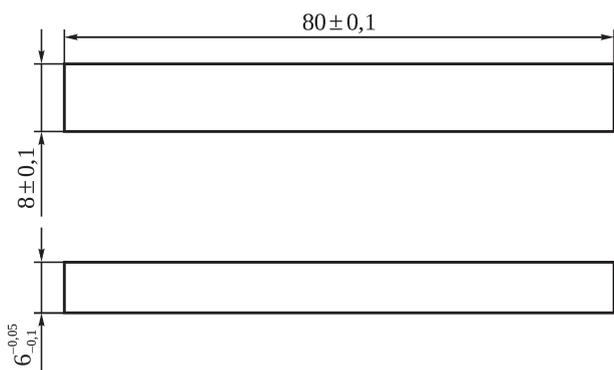
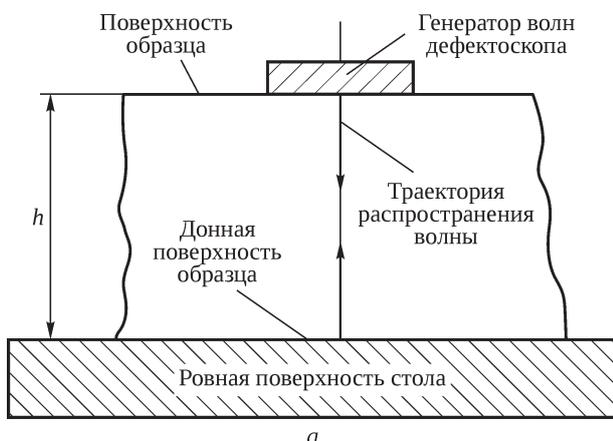


Рис. 1. Эскиз образца, использованного в исследованиях

В настоящей работе образцы из титанового и алюминиевого сплавов испытывали, применяя оба подхода.

Использовали образцы (по пять из каждого сплава) в форме параллелепипеда, длиной  $L = 80$  мм, шириной  $b = 8$  мм, толщиной  $h = 6$  мм (рис. 1). Испытания проводили при комнатной температуре. Деформации материала при испытаниях оставались упругими, кроме последнего этапа, что позволило использовать одни и те же образцы во всех видах испытаний.

**Определение динамического модуля упругости по измерению скорости распространения продольных волн деформации ультразвуковым способом.** Возбуждение упругих продольных волн в образцах и измерение скорости их распространения по заданному направлению производили способом, изложенным в [9], с помощью лазерно-ультразвукового дефектоскопа. Принцип работы дефектоскопа основан на возбуждении наносекундных ультразвуковых импульсов продольных волн в исследуемом образце и измерением времени ( $t$ ) между генерацией зондирующего импульса и регистрацией первой отраженной от противоположной (донной) поверхности тела волны (рис. 2). Образец располагали на ровной поверхности стола свободно, без закрепления.



При толщине образца  $h$  скорость продольной волны  $v = 2h/t$ .

В изотропном теле все физические свойства и скорость распространения упругих волн должны быть одинаковыми во всех направлениях. Для проверки изотропии материала скорость измеряли в двух взаимно перпендикулярных направлениях: по толщине (перпендикулярно поверхности) и длине образца.

Из теоретических работ известно, что при приложении к упругому телу импульсной нагрузки в нем возникают объемные и поверхностные волны, скорость распространения которых зависит от физико-механических свойств материала: плотности ( $\rho$ ), динамического модуля упругости ( $E_d$ ) и коэффициента Пуассона ( $\mu$ ). При измеренной скорости волны и заранее найденной плотности динамический модуль упругости определим по формуле [10; 11]

$$E_d = \rho v^2 \varphi(\mu), \quad (2)$$

где функция  $\varphi(\mu)$  зависит от типа волны. Для основной продольной волны при стесненной деформации в поперечных направлениях

$$\varphi(\mu) = (1 + \mu)(1 - 2\mu)/(1 - \mu), \quad (3)$$

откуда при типичном для металлов значении  $\mu = 0,3$  получим  $\varphi(\mu) \approx 0,74$ .

В настоящем исследовании динамический модуль упругости рассчитывали для каждого отдельного образца, используя его плотность, измеренную объемно-массовым методом, коэффициент Пуассона, вычисленный по отношению поперечных и продольных упругих деформаций при растяжении, и скорость распространения в нем продольных волн (табл. 1).

Измеренные характеристики образцов подчиняются нормальному закону распределения. При малом объеме выборки испытаний образцов,  $n = 5$ , средние

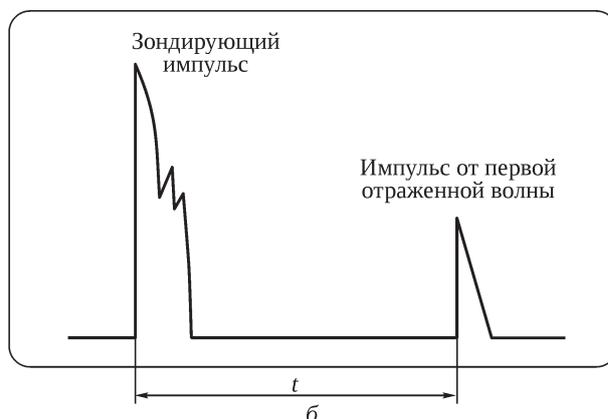


Рис. 2. Измерение скорости распространения продольной волны [9]: а – схема испытаний; б – пример сигнала на осциллографе

**Табл. 1.** Измеренные и расчетные физико-механические характеристики образцов при ультразвуковом исследовании способом [9]

Образец	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\mu$	$v$ , м/с		$E_d$ , ГПа	
			по $L$	по $h$	по $L$	по $h$
<b>Титановый сплав ВТ6Л</b>						
№ 1	4416	0,279	6212	6179	133,6	132,2
№ 2	4414	0,291	6269	6166	132,0	127,7
№ 3	4428	0,300	6184	6172	125,8	125,3
№ 4	4413	0,283	6196	6178	131,6	130,8
№ 5	4434	0,298	6212	6183	127,8	126,6
Среднее значение	4419	0,290	6222	6177	130,2	128,5
СКО	10	0,009	31	7	3,2	2,9
<b>Алюминиевый сплав Д16</b>						
№ 6	2770	0,301	6381	6341	83,5	82,5
№ 7	2757	0,293	6405	6362	85,6	84,5
№ 8	2744	0,290	6369	6367	85,0	84,9
№ 9	2759	0,309	6395	6335	81,7	80,1
№ 10	2776	0,305	6381	6296	82,8	80,6
Среднее значение	2761	0,300	6386	6340	83,7	82,5
СКО	12	0,008	14	28	1,6	2,2

значения ( $\bar{x}$ ) и среднеквадратические отклонения (СКО) ( $S_x$ ) характеристик

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (4)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad (5)$$

где  $x_i$  – значения параметров отдельных образцов [12].

Среднее значение динамического модуля упругости и СКО при распространении волны вдоль образцов из титанового сплава составили  $130,2 \pm 3,2$  ГПа, из алюминиевого –  $83,7 \pm 1,6$  ГПа. При распространении волны по толщине образцов эти величины составили соответственно  $128,5 \pm 2,9$  ГПа и  $82,5 \pm 2,2$  ГПа.

Рассчитанные модули в двух взаимно перпендикулярных направлениях образцов различаются незначительно, что подтверждает изотропию исследуемых материалов.

Полученные значения динамического модуля упругости сплавов ВТ6Л и Д16 выше справочных данных о статическом модуле упругости для этих материалов на 15...20% (115 ГПа для ВТ6Л [13] и 70 ГПа для Д16 [14]). Оценим, как погрешности определения величин  $\rho$ ,  $v$ ,  $\mu$ , входящих в выражение (2), могли повлиять на расчетный динамический модуль упругости. Плотность материалов определена достаточно точно, исходя из относительной погрешности измерения массы не более 0,5% и разме-

ров – не более 0,1%. Указанная в паспорте на дефектоскоп допускаемая относительная погрешность измерения скорости ультразвука составляет  $\pm 3\%$ . Погрешность определения коэффициента Пуассона, оцененная по относительному разбросу значений, не превышала  $\pm 3\%$ .

С учетом сказанного разброс значений  $E_d$ , рассчитанных по выражениям (2) и (3), мог достигать 9...10%.

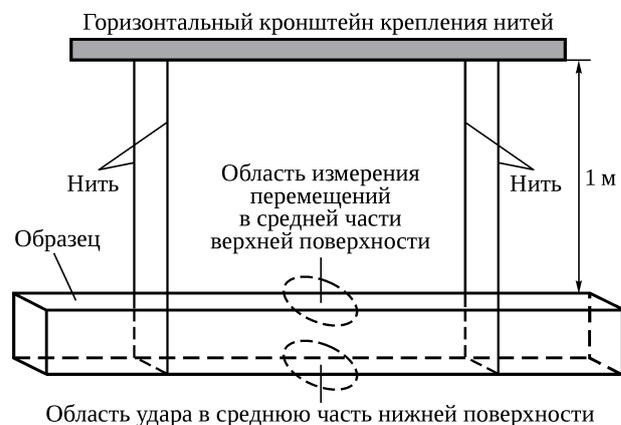
Использование обычно применяемого для длинных тонких стержней выражения  $v = (E/\rho)^{0,5}$ , связывающего скорость распространения одномерных волн с характеристиками материала, в данном случае привело бы к еще большим значениям динамического модуля упругости.

Помимо описанного двухстороннего разброса параметров, определение динамического модуля упругости по формуле (2) могло вызвать его одностороннее превышение над истинной величиной, если при иницировании и отражении волн возникали поверхностные волны Рэлея и Лэмба, скорости распространения которых, по данным [9], на 9...11% ниже скорости основной продольной волны.

**Определение динамического модуля упругости по спектру частот подвешенного на нитях образца при его импульсном возбуждении.** Чтобы исключить влияние крепления образцов на рассеяние энергии при вибрационных исследованиях демпфирования материалов, образец подвешивают на двух тонких нитях или проволоках [6]. Если положение нитей относительно образца совпадает с узлами перемещений по первой «плавающей» форме его колебаний, переменные усилия в нитях на этой частоте исчезают.

Образец был подвешен горизонтально на неподвижном кронштейне с помощью двух хлопчатобумажных нитей (рис. 3). Расстояние между кронштейном и образцом составляло 1 м. Малые колебания в образце возбуждали легким одиночным ударом молоточком по центру нижней поверхности образца.

В течение 2 с после удара с помощью лазерного виброметра измеряли виброскорость в вертикальном направлении точки в центре верхней поверхности



**Рис. 3.** Подвешенный на нитях образец (схема испытаний)

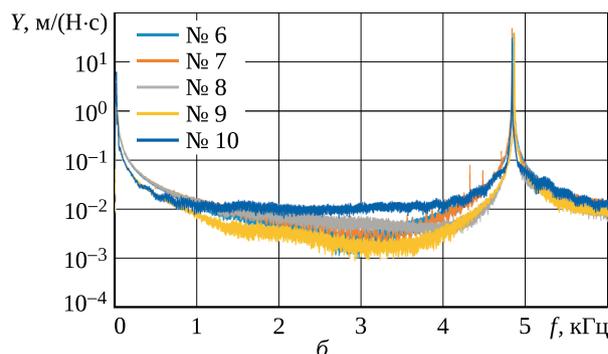
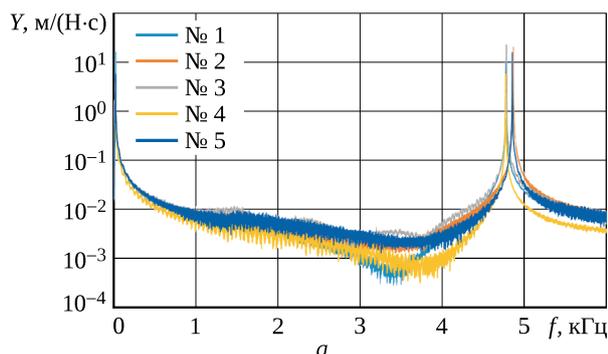


Рис. 4. Частотные характеристики подвешенных на нитях образцов из сплавов ВТ6Л (а) и Д16 (б)

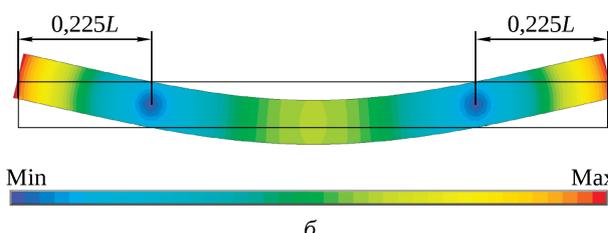
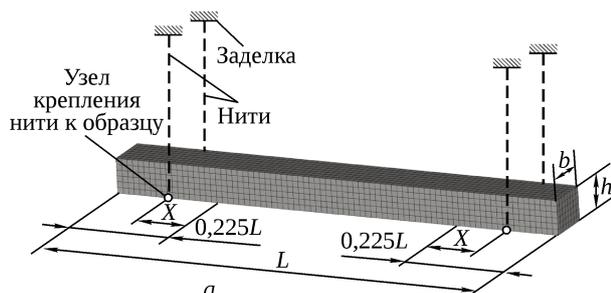


Рис. 5. К расчетному определению динамического модуля упругости методом конечных элементов: а – конечно-элементная модель образца; б – относительные перемещения при колебании неопертого образца по первой изгибной форме

образца (частота измерения 30 кГц, погрешность измерения 1%). Соответствующие этим измерениям частотные характеристики механической подвижности ( $Y$ ) образцов показаны на рис. 4. Области повышенных значений механической подвижности около 0...5 Гц соответствуют перемещению образца как жесткого целого вследствие удара и в данном случае интереса не представляют. Яркие выраженные максимумы частотных характеристик в диапазоне частот 4700...4900 Гц указывают на колебания подвешенных на нитях образцов, предположительно, по первой изгибной форме, что подтвердил расчет.

Динамический модуль упругости материала определяли по частоте колебаний подвешенного на нитях образца путем расчета собственных частот колебаний неопертых («плавающих») образцов методом конечных элементов (МКЭ), последовательно подбирая модуль упругости до тех пор, пока расчетная первая (ненулевая) собственная частота образца не сравняется с экспериментальной.

В расчетах учитывали фактические размеры каждого образца и его измеренную плотность. В конечно-элементной модели образца (рис. 5,а) использованы гексагональные элементы второго порядка с характерной длиной ребра  $l_3 = 1$  мм. На рис. 5,б показана первая изгибная форма колебаний образца, узлы колебаний находятся на расстоянии  $0,225L$  от торцов.

Вычисленные с помощью МКЭ среднее значение динамического модуля упругости и СКО составили

для титановых образцов  $117,1 \pm 0,6$  ГПа, для алюминиевых –  $71,8 \pm 0,7$  ГПа (табл. 2). Коэффициент вариации  $r = S_x/\bar{x}$  измеренных частот и расчетных значений динамического модуля упругости не превышает 1%.

Табл. 2. Экспериментальная частота первой изгибной формы колебаний образцов при импульсном возбуждении и расчетные значения динамического модуля упругости

Образец	$f$ , Гц	$E_d$ , ГПа	
		МКЭ	(7)
<b>Титановый сплав ВТ6Л</b>			
№ 1	4770	117,4	112,7
№ 2	4871	117,5	112,7
№ 3	4791	117,4	112,7
№ 4	4782	117,0	112,3
№ 5	4856	116,1	111,3
Среднее значение	4814	117,1	112,3
СКО	46	0,6	0,6
<b>Алюминиевый сплав Д16</b>			
№ 6	4887	72,0	69,0
№ 7	4866	71,4	68,4
№ 8	4852	70,8	67,9
№ 9	4886	72,5	69,5
№ 10	4871	72,5	69,5
Среднее значение	4873	71,8	68,9
СКО	14	0,7	0,7

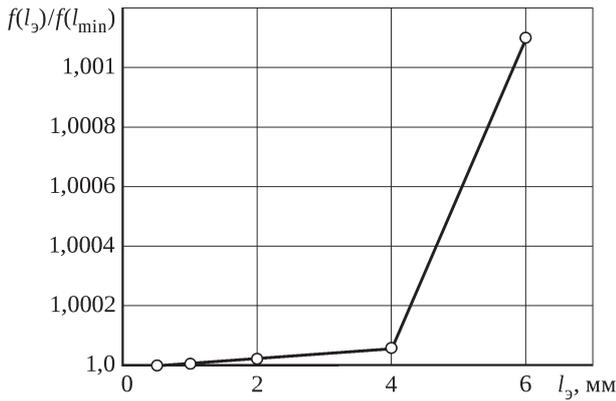


Рис. 6. Влияние размера конечного элемента на расчетную частоту свободно «плавающей» образца

Для оценки влияния конечно-элементной сетки на результаты расчетов проведены сравнительные вычисления первой (ненулевой) собственной частоты образца при разной длине ребер  $l_3$ . По относительному изменению частоты в зависимости от длины ребра конечного элемента  $0,5 \leq l_3 \leq 6$  мм (рис. 6) видно, что влияние размера элемента сетки на результаты расчета собственной частоты слабое, а при длине ребра  $l_3 \leq 1$  мм расчетная частота перестает меняться. Следовательно, при выбранной длине  $l_3 = 1$  мм влияние размера конечных элементов на результаты расчетов исключено.

Чтобы исследовать влияние расположения нитей относительно узлов колебания и податливости нитей на величину модуля упругости, проведена серия расчетов, в которых нити располагались на расстоянии  $X \in [-0,2L; 0,2L]$  от узлов колебаний (см. рис. 5,а). Нити моделировали с помощью двухузловых элементов COMBIN14; один из узлов элемента являлся узлом нижней части модели образца, в плоскости предполагаемого опирания на нить, а другой был заделан. Продольную жесткость нитей  $c_n = \pi d_n^2 E_n / 4l_n$  принимали приближенно равной 1 Н/мм, учитывая известные диаметр  $d_n = 0,3$  мм, длину участка нити от кронштейна до образца в испытании  $l_n = 10^3$  мм и модуль упругости хлопка  $E_n = 12$  ГПа.

Расчетное исследование показало, что расположение нитей и учет их податливости (при выбранных параметрах нити) не повлияли на величину динамического модуля упругости. Различие значений динамического модуля упругости, полученных подбором при расчете с учетом нитей и без них, составило менее 0,01%.

Для сравнения с результатами, полученными методом конечных элементов, модуль упругости был вычислен аналитически, по формуле для частоты изгибных колебаний балки постоянного поперечного сечения [15]:

$$f = \frac{\lambda_1}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{E_d J}{\rho A}}, \quad (6)$$

где  $L$  – длина балки;  $J$  – момент инерции;  $A$  – площадь поперечного сечения;  $\lambda_1$  – коэффициент, учитывающий форму колебания.

При  $J/A = h^2/12$  и  $\lambda_1 = 22,4$  для первой формы колебаний свободно «плавающей» балки имеем

$$E_d^{(1)} = 12\rho \left( \frac{2\pi f L^2}{\lambda_1 h} \right)^2. \quad (7)$$

Применение выражения (7) приводит к более низким значениям динамического модуля упругости (см. табл. 2), что может быть связано с ограниченной применимостью модели балки Бернулли [16] к образцам указанных размеров.

**Определение динамического модуля упругости по частоте резонансных колебаний консольно закрепленного образца.** Распространенным методом вибрационных испытаний материалов является возбуждение на вибростенде гармонических колебаний консольно закрепленного образца с измерением его резонансной частоты по первой изгибной форме колебаний. Далее можно расчетно определить значения динамического модуля упругости.

Испытания проводили на электродинамическом вибростенде. Образец (2) зажимали консольно в оснастке вибростенда между плоскими металлическими захватами (1, 3), стянутыми двумя болтами (4); нижний захват (3) жестко соединяли с элементами (5) подвижного стола вибростенда (рис. 7,а). Такой способ крепления обычно применяют при усталостных испытаниях рабочих лопаток компрессора, зажимая их по хвостовику. Предполагалось, что металлические захваты контактировали с образцом по всей зажимаемой плоскости. Исходная длина зажимаемой части образца  $l_0 = 20$  мм, консольной –  $l_1 = 60$  мм ( $s$  – фактическая длина зажатой части, измеряемая от левого торца). При моменте затяжки болтов 12 Н-м его дальнейшее увеличение почти

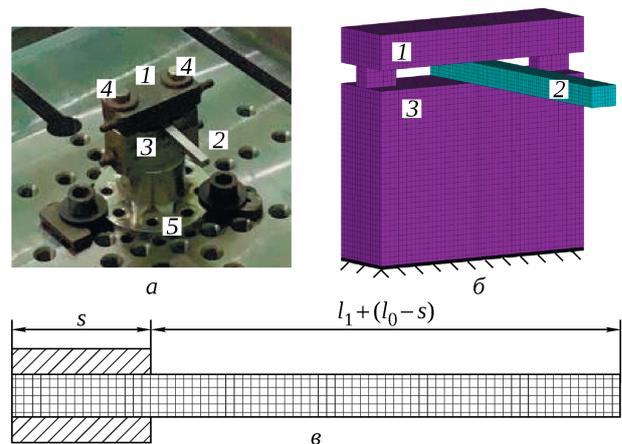


Рис. 7. Консольно закрепленный образец: а – в оснастке вибростенда; б – конечно-элементная модель образца и оснастки; в – схема защемления в оснастке

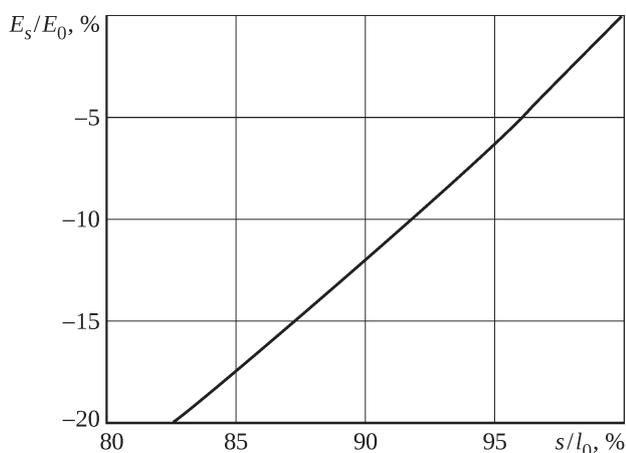
не влияло на резонансную частоту колебаний образца. Для контроля уровня резонансных напряжений в области крепления образца в захватах монтировали тензорезистор.

С помощью аппаратуры проводили ручную настройку частоты и амплитуды вынуждающей нагрузки вибростенда на первую резонансную частоту колебаний консольно закрепленного образца с величиной резонансных напряжений 100 МПа в области крепления в захватах.

Среднее значение измеренной первой резонансной частоты колебаний и разброс частот для титановых образцов составили  $1112 \pm 23$  Гц, для алюминиевых –  $1175 \pm 18$  Гц (табл. 3).

**Табл. 3.** Экспериментальная резонансная частота консольно закрепленных образцов и расчетные значения динамического модуля упругости

Образец	$f$ , Гц	$E_d$ , ГПа
<b>Титановый сплав ВТ6Л</b>		
№ 1	1098	101,6
№ 2	1125	102,8
№ 3	1144	110,8
№ 4	1086	98,5
№ 5	1107	98,1
Среднее значение	1112	102,4
СКО	23	5,1
<b>Алюминиевый сплав Д16</b>		
№ 6	1174	62,7
№ 7	1191	65,1
№ 8	1181	63,6
№ 9	1183	64,2
№ 10	1145	60,6
Среднее значение	1175	63,3
СКО	18	1,7



**Рис. 8.** Влияние полноты заделки на расчетное значение динамического модуля упругости

Для расчета собственной частоты колебаний образца в оснастке была использована конечно-элементная модель образца, защемленного в захватах упрощенной модели оснастки, которая заделана в основании (см. рис. 7,б). Материал оснастки – сталь с плотностью  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$  и модулем упругости  $E = 200$  ГПа.

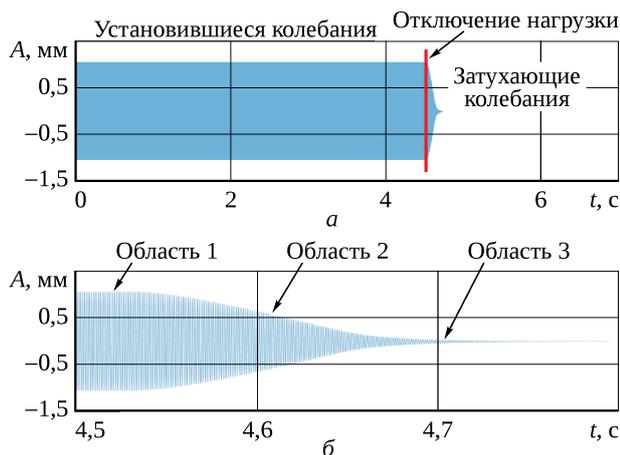
Динамический модуль упругости материалов определяли последовательным подбором значений, аналогично подходу, использованному для образца, подвешенного на нитях. Рассчитанные методом конечных элементов средние значения составили для титановых образцов  $102,4 \pm 5,1$  ГПа, для алюминиевых –  $63,3 \pm 1,7$  ГПа (см. табл. 3).

Модуль упругости, рассчитанный по резонансным частотам консольно закрепленных образцов, ниже на 12...13%, чем в случае подвешивания на нитях. К такому эффекту могло привести неполное прижатие защемяемой части образца к элементам оснастки, увеличивающее фактическую длину консоли, и возможный поворот защемленного конца образца в области заделки.

На рис. 8 приведена зависимость от полноты заделки ( $s/l_0$ ) отношения модуля упругости, вычисленного при разной длине ( $s$ ) зажатой в оснастке части ( $E_s$ ), к модулю, определенному для неопертого образца ( $E_0$ ). Видно, что к снижению динамического модуля упругости на 12...13% могло привести уменьшение фактической длины зажатой части образца на 10% (на 2 мм) с соответствующим увеличением длины консоли.

**Определение динамического модуля упругости по частоте затухающих колебаний консольно закрепленного образца.** Для сопоставления с результатами работы [3], авторы которой определяли динамический модуль упругости пересчетом по частоте затухающих свободных колебаний, вызванных начальным ударом, испытания консольно закрепленных образцов были продолжены с отключением возбуждения от вибростенда в некоторый момент времени. При этом форма колебаний образца не менялась, а частоту колебаний определяли на разных участках экспериментальной кривой, отражающей зависимость перемещения свободного конца образца (рис. 9), вычисляя далее соответствующий модуль упругости.

Декремент колебаний титанового сплава несколько возрастает с увеличением амплитуды интенсивности вибронпряжений [17]. При затухании свободных колебаний интенсивность вибронпряжений снижается от цикла к циклу, декремент и рассеяние энергии уменьшаются, частота вынужденных колебаний немного увеличивается (табл. 4). Это, в свою очередь, должно было привести к небольшому увеличению динамического модуля упругости: для титановых образцов расчетное значение динамического модуля упругости определено в диапазоне 102...103 ГПа в зависимости от частоты



**Рис. 9.** Экспериментальная кривая колебаний консольно закрепленного титанового образца с отключением возбуждения в момент времени 4,5 с:

*а* – полная запись сигнала; *б* – области кривой и их временные границы для вычисления частоты колебаний

**Табл. 4.** Экспериментальная осредненная за 20 периодов частота колебаний консольно закрепленных образцов, Гц

Материал образца	Область 1	Область 2	Область 3
ВТ6Л	1112 ± 23	1113 ± 21	1123 ± 29
Д16	1174 ± 18	1174 ± 21	1180 ± 24

свободных затухающих колебаний, для алюминиевых – в диапазоне 60...61 ГПа.

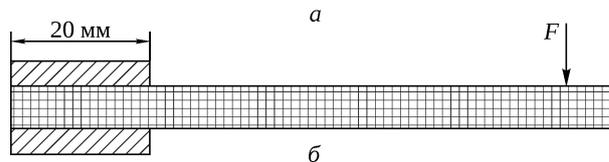
### Экспериментально-расчетное определение статического модуля упругости образцов

**Определение статического модуля упругости испытанием на изгиб образца.** Для сопоставления динамического и статического модулей упругости при одинаковом характере деформации образцов были проведены испытания консольно закрепленных образцов на изгиб от действия поперечной силы ( $F$ ), статически приложенной через шток вблизи их свободного конца (рис. 10). Силу задавали с помощью управляющей аппаратуры стенда: для титановых образцов  $F = 200$  Н, для алюминиевых  $F = 100$  Н. Прогиб образца ( $\delta$ ) регистрировали измерительной аппаратурой стенда по вертикальному перемещению штока.

Статический модуль упругости материала определяли по измеренному статическому прогибу образцов посредством статического расчета нагруженных силой  $F$  образцов, подбирая модуль упругости до тех пор, пока расчетное значение прогиба образца в месте приложения силы не сравняется с экспериментальной величиной. В расчетах использовали конечно-элементную модель, изображенную на рис. 7,б, и схему нагружения, показан-

ную на рис. 10,б. Во всех расчетах учитывали фактические размеры и коэффициент Пуассона образцов.

Расчетные значения статического модуля упругости титановых и алюминиевых образцов составили  $98,9 \pm 2,2$  ГПа и  $59,3 \pm 0,8$  ГПа (табл. 5), что ниже справочных значений для этих материалов на 15...16%, – очевидно, по тем же причинам несовершенства заделки образцов, что были указаны выше.



**Рис. 10.** Консольно закрепленный образец, нагруженный силой:  
*а* – в оснастке вибростенда;  
*б* – схема нагружения образца

**Табл. 5.** Экспериментальные значения перемещений штока при нагружении образцов и расчетные значения статического модуля упругости

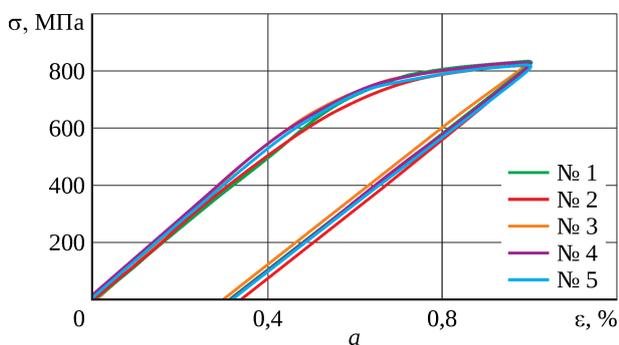
Образец	$\delta$ , мм	$E_{st}$ , ГПа
<b>Титановый сплав ВТ6Л</b>		
№ 1	0,925	102,7
№ 2	0,913	97,3
№ 3	0,944	99,0
№ 4	0,960	97,1
№ 5	0,891	98,5
Среднее значение	0,927	98,9
СКО	0,027	2,2
<b>Алюминиевый сплав Д16</b>		
№ 6	0,723	60,1
№ 7	0,732	59,9
№ 8	0,739	59,3
№ 9	0,759	58,0
№ 10	0,743	59,2
Среднее значение	0,739	59,3
СКО	0,013	0,8



Рис. 11. Растягиваемый образец с экстензометром в оснастке испытательной машины

**Определение статического модуля упругости испытанием на растяжение образца.** Согласно стандартному подходу, статический модуль упругости может быть определен по прямолинейному участку диаграммы растяжения или по начальному участку кривой разгрузки, исходя из формулы (1).

В данном испытании для сопоставления с динамическими испытаниями использовали те же (нестандартные) образцы, что и для определения динамического



модуля упругости (см. рис. 1). Образцы зажимали с обоих концов в захватах испытательной разрывной машины, деформации рабочего участка образца измеряли с помощью экстензомера, установленного на средней части образца (рис. 11). Перемещением одного из захватов образец растягивали, измеряя растягивающую силу, до достижения относительной деформации 1%, а затем разгружали. По начальному участку кривой разгрузки (рис. 12) определяли статический модуль упругости. Для титановых и алюминиевых образцов его получили равным  $116,3 \pm 2,3$  ГПа и  $70,5 \pm 1,5$  ГПа, что согласуется со справочными данными для этих материалов.

## Заключение

Значения модуля упругости, полученные разными экспериментально-расчетными методами, заметно различаются (табл. 6). Наиболее достоверным следует считать динамический модуль упругости, рассчитываемый по частоте первой «плавающей» формы изгибных колебаний образца, подвешенного на двух тонких нитях. Частота колебаний такого образца, инициированная легким ударом по нему в плоскости подвески, определяется для исследуемого материала только упругими свойствами, плотностью материала и размерами образца и не зависит от мест и податливости подвески.

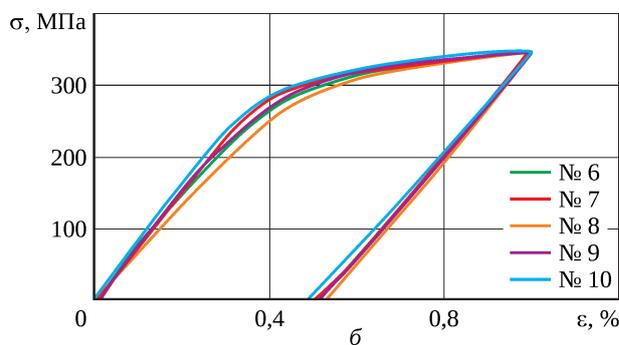


Рис. 12. Экспериментальные диаграммы растяжения образцов из сплавов ВТ6Л (а) и Д16 (б)

Табл. 6. Средние значения модулей упругости по пяти образцам из сплава ВТ6Л и сплава Д16, полученные при использовании различных методов испытаний и способов обработки результатов, ГПа

Способ определения	ВТ6Л	Д16
Ультразвуковой – по измеренной скорости продольных волн в образцах *)	$130,2 \pm 3,2$ (L) $128,5 \pm 2,9$ (h)	$83,7 \pm 1,6$ (L) $82,5 \pm 2,2$ (h)
Ультразвуковой – нижний предел оценки **)	116...118	74...76
По частоте колебаний образцов при подвешивании на нитях	$117,1 \pm 0,6$	$71,8 \pm 0,7$
По резонансной частоте при изгибе консольно закрепленных образцов	$102,4 \pm 5,1$	$63,3 \pm 1,7$
По частоте затухающих изгибных колебаний консольно закрепленных образцов	102...103	60...61
По статическому изгибу консольно закрепленных образцов	$98,9 \pm 2,2$	$59,3 \pm 0,8$
По статическому растяжению образцов	$116,3 \pm 2,3$	$70,5 \pm 1,5$
Справочные данные о статическом модуле упругости [13; 14]	113	70

\*) Расчет по формулам (2) и (3). \*\*) Учет снижения динамического модуля упругости на 9...10% из-за возможной погрешности измерений.

Оценивая достоверность определения динамического модуля упругости по скорости распространения продольных ультразвуковых волн, следует принимать во внимание погрешность определения скорости волн, разброс плотности и коэффициента Пуассона, входящих в выражения (2) и (3). Мало изучена применимость аналитических зависимостей, связывающих скорость распространения ультразвуковых волн с физико-механическими характеристиками материала, к телам конкретных размеров.

Занижение на 12...13% динамического модуля упругости, определенного по резонансной частоте изгибных колебаний, и занижение на 15...16% статического модуля, определенного по прогибу консольно закрепленных образцов, были, очевидно, вызваны первоначальной неравномерностью заделки их концов в оснастке.

Коэффициент вариации динамического модуля упругости, рассчитанного по частоте первой формы колебаний подвешенных образцов, находился в преде-

лах 1%. Разброс значений модулей упругости в остальных случаях не превышал 5%.

Сравнение средних значений динамического и статического модулей упругости, определенных при нормальной температуре и частоте колебаний не ниже 100 Гц с использованием сопоставимых подходов (по частоте подвешенного образца и статическому растяжению, по резонансной частоте и изгибу консольно закрепленного образца), показывает несколько большие значения динамического модуля упругости как для титанового сплава ВТ6Л, так и для алюминиевого сплава Д16.

Отмеченное в работе [3] уменьшение динамического модуля по сравнению со статическим, возможно, связано с относительно низкой частотой изгибных колебаний тонких образцов-пластин (3...70 Гц), которые могли быть чувствительны к особенностям заделки. Влияние частоты колебаний на динамический модуль упругости требует дальнейшего изучения.

## Литература

1. Шибаетов И.А., Белов О.Д., Сас И.Е. Определение динамических и статических модулей упругости образцов гранитов // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2021. № 4-1. С. 5–15.
2. Accounting for the frequency-dependent dynamic elastic modulus of duralumin in deformation problems / Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2017. Vol. 58, no. 3. P. 517–528.
3. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. Идентификация динамических характеристик упругости и демпфирующих свойств титанового сплава ОТ-4 на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов // Проблемы машиностроения и прочности машин. 2019. № 2. С. 27–39.
4. ГОСТ 25095-82 (ИСО 3312-75). Сплавы твердые спеченные. Метод определения модуля упругости (модуля Юнга). М. : Изд-во стандартов, 1998. 6, [1] с.
5. ASTM E1875-13. Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio by sonic resonance. 2013. 9 p.
6. ASTM E1876-15. Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio by impulse excitation of vibration. 2015. 16 p.
7. ГОСТ Р 57947-2017. Композиты. Определение динамического модуля упругости, модуля упругости при сдвиге и коэффициента Пуассона методом импульсного воздействия вибрации. М. : Стандартинформ, 2019. III, 23 с.
8. ГОСТ Р 57862-2017. Композиты. Определение динамического модуля упругости, модуля упругости при сдвиге и коэффициента Пуассона методом акустического резонанса. М. : Стандартинформ, 2019. IV, 15 с.
9. Кретов Е.Ф. Ультразвуковая дефектоскопия в машиностроении. Изд. 3-е, перераб. и доп. СПб. : СВЕН, 2011. 312 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 7. Теория упругости. Изд. 4-е, испр. и доп. Е.М. Лившицем, А.М. Косевичем и Л.П. Питаевским. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 248 с.
11. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / ред. совет: В.Н. Челомей (пред., гл. ред. изд.) и др. Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов / Э.Л. Айрапетов, И.А. Биргер, В.Л. Вейц и др. ; под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. М. : Машиностроение, 1980. 544 с.
12. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний. М. : Машиностроение, 1972. 232 с.
13. Авиационные материалы : справочник в 9 т. / под общ. ред. А.Т. Туманова ; М-во авиац. пром-сти СССР, Всесоюз. науч.-исслед. ин-т авиац. материалов. Изд. 6-е, перераб. и доп. Т. 5. Магниево-титановые сплавы / науч. ред. тома М.Б. Альтман, С.Г. Глазунов, С.И. Кишкина. М. : ОНТИ, 1973. 585 с.

- 
14. Авиационные материалы : справочник в 9 т. / под общ. ред. Р.Е. Шалина ; М-во авиац. пром-сти СССР, Всесоюз. науч.-исслед. ин-т авиац. материалов. Изд. 6-е, перераб. и доп. Т. 4. Алюминиевые и бериллиевые сплавы. Ч. 1. Деформируемые алюминиевые сплавы и сплавы на основе бериллия. Кн. 1 / науч. редакторы тома С.И. Кишкина, И.Н. Фридляндер. М. : ОНТИ, 1982. 628 с.
  15. Шорр Б.Ф. Механические характеристики конструкционных материалов и оценка прочности деталей // Расчет на прочность деталей машин : справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. 4-е изд., перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1993. Гл. 2. С. 23–44.
  16. Феодосьев В.И. Сопrotивление материалов : учеб. для вузов. Изд. 10-е, перераб. и доп. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с. (Механика в техническом университете : в 8 т. ; т. 2).
  17. Шорр Б.Ф., Серебряков Н.Н. Расчетно-экспериментальный анализ амплитудно-зависимых характеристик демпфирования в деталях и материалах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 3. С. 91–99.

## References

1. Shibaev I.A., Belov O.D., Sas I.E. Determination of dynamic and static elasticity modules of granite samples. Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten' [Mining Informational and Analytical Bulletin]. 2021. No. 4-1. P. 5–15.
2. Accounting for the frequency-dependent dynamic elastic modulus of duralumin in deformation problems / Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2017. Vol. 58, no. 3. P. 517–528.
3. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Identification of the dynamic elasticity characteristics and damping properties of the OT-4 titanium alloy based on study of damping flexural vibrations of the test specimens // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2019. Vol. 48, no. 2. P. 119–129.
4. GOST 25095-82 (ISO 3312-75). Sintered hardmetals. Method of determination of elastic modulus (of Young's modulus). Moscow: Publishing House of Standards, 1998. 6, [1] p.
5. ASTM E1875-13. Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio by sonic resonance. 2013. 9 p.
6. ASTM E1876-15. Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio by impulse excitation of vibration. 2015. 16 p.
7. GOST R 57947-2017. Composites. Determination of dynamic Young's modulus, shear modulus and Poisson's ratio by impulse excitation of vibration method. Moscow: Standartinform, 2019. III, 23 p.
8. GOST R 57862-2017. Composites. Determination of dynamic Young's modulus, shear modulus and Poisson's ratio by sonic resonance. Moscow: Standartinform, 2019. IV, 15 p.
9. Kretov E.F. Ul'trazvukovaia defektoskopiia v mashinostroenii [Ultrasonic testing in mechanical engineering]. 3rd edition, revised and expanded. St. Petersburg: SVEN, 2011. 312 p.
10. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaiia fizika [Course of theoretical physics]: in 10 volumes. Volume 7. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. 4th edition, corrected and expanded by E.M. Lifshits, A.M. Kosevich and L.P. Pitaevskii. Moscow: Nauka, Glavnaia redaktsiia fiziko-matematicheskoi literatury [Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature], 1987. 248 p.
11. Vibratsii v tekhnike : spravochnik [Machinery vibrations : a reference book] in 6 volumes. Editorial Board: V.N. Chelomei (chairman, editor-in-chief) et al. Volume 3. E.L. Airapetov, I.A. Birger, V.L. Veits et al. Kolebaniia mashin, konstruksii i ikh elementov [Vibrations of machines, structures and their elements] edited by F.M. Dimentberg and K.S. Kolesnikov. Moscow: Mashinostroenie [Mechanical Engineering], 1980. 544 p.
12. Stepnov M.N. Statisticheskaiia obrabotka rezul'tatov mekhanicheskikh ispytaniia [Statistical processing of the results of mechanical tests]. Moscow: Mashinostroenie [Mechanical Engineering], 1972. 232 p.
13. Aviatsionnye materialy: spravochnik [Aviation materials: a handbook] in 9 volumes. Under the general editorship of A.T. Tumanov. Ministerstvo aviatsionnoi promyshlennosti SSSR [Ministry of Aviation Industry of the USSR], Vsesoiuznyi nauchno-issledovatel'skii institut aviatsionnykh materialov [All-Union Scientific Research Institute of Aviation Materials]. 6th edition, revised and expanded. Volume 5. Magnievyie i titanovyie splavy [Magnesium and titanium alloys]. Scientific editors of the volume M.B. Al'tman, S.G. Glazunov, S.I. Kishkina. Moscow: ONTI, 1973. 585 p.
14. Aviatsionnye materialy: spravochnik [Aviation materials: a handbook] in 9 volumes. Under the general editorship of R.E. Shalin. Ministerstvo aviatsionnoi promyshlennosti SSSR [Ministry of Aviation Industry of the USSR], Vsesoiuznyi nauchno-issledovatel'skii institut aviatsionnykh materialov [All-Union Scientific Research Institute of Aviation Materials].

- 
- 6th edition, revised and expanded. Volume 4. Aluminievye i berillievye splavy [Aluminum and beryllium alloys]. Part 1. Deformiruemye aluminievye splavy i splavy na osnove berillia [Deformable aluminum alloys and beryllium-based alloys]. Book 1. Scientific editors of the volume S.I. Kishkina, I.N. Fridliander. Moscow: ONTI, 1982. 628 p.
15. Shorr B.F. Mekhanicheskie kharakteristiki konstruktsionnykh materialov i otsenka prochnosti detalei [Mechanical performance of structural materials and evaluation of the strength of parts]. Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. Raschet na prochnost' detalei mashin: spravochnik [Calculation of the strength of machine parts: a reference book]. 4th edition revised and expanded. Moscow: Mashinostroenie [Mechanical Engineering], 1993. Chapter 2. P. 23–44.
  16. Feodos'ev V.I. Soprotivlenie materialov: uchebnik dlia vtuzov [Strength of materials: textbook for higher education institutions]. 10th edition, revised and expanded. Moscow: Izdatel'stvo MGTU im. N.E. Baumana [Publishing House of Bauman Moscow State Technical University], 1999. 592 p. (Mekhanika v tekhnicheskoi universitete [Mechanics for the Technical University] in 8 volumes; vol. 2).
  17. Shorr B.F., Serebryakov N.N. Numerical-experimental analysis of amplitude-dependent damping performances in components and materials. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2011. Vol. 40, issue 3. P. 272–279.

*Материалы получены редакцией 25.10.2022*