

# Особенности моделирования регуляторов ГТД на цифровых вычислительных машинах

**Нэй А.В.**

*Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, г. Москва*

Рассмотрены методы численного расчета математических моделей гидромеханических регуляторов систем автоматического управления газотурбинными двигателями, учитывающие специфические особенности этих устройств и позволяющие обеспечить необходимые точность и скорость при сохранении устойчивости вычислительного процесса. Разработанная достаточно давно, приведенная в статье методика используется в современных программах расчета математических моделей регуляторов.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, математическая модель, автоматическая система управления, гидромеханический регулятор, интегрирование, шаг интегрирования

## Features of modeling GTE controllers on digital computers

**Nei A.V.**

*CIAM, Moscow*

Numerical calculation methods for mathematical models of hydromechanical controllers, which are used in gas turbine engine automatic control systems, are considered. They take into account the specific features of these devices and allow you to provide the necessary accuracy and speed while maintaining the stability of the computational process. Developed a fairly long time ago, the methodology given in the article is used in modern software for calculating mathematical models of controllers.

**Keywords:** differential equations, mathematical model, automatic control system, hydromechanical controller, integrating, integration step

### Введение

Математические модели для расчета переходных процессов в регуляторах ГТД представляют собой совместную систему из дифференциальных и алгебраических уравнений [1–4]. Обычно расчеты динамических процессов в регуляторах ГТД проводят совместно с моделями самих двигателей, которые, как правило, являются существенно более инерционными, чем модели регуляторов. А это, как будет показано далее, должно учитываться при численном решении системы уравнений таких объединенных моделей.

Для расчета переходных процессов названную систему интегрируют по времени при заданных условиях и входных воздействиях (задача Коши).

Возможные варианты построения математической модели и специфика вычислительных проблем, с которыми приходится сталкиваться при численном расчете с помощью таких моделей на цифровых вычислительных машинах (ЦВМ), будут показаны на примере одного

из характерных элементов гидромеханических регуляторов [3; 5].

### Специфика численного решения уравнений при разных способах моделирования регуляторов

Для гидромеханического селектора [3] (рис. 1), золотник которого находится в положении, когда управление расходом топлива осуществляется гидромеханическим регулятором частоты вращения (при отключенном воздействии со стороны электронного регулятора), проиллюстрируем, как определенные динамические факторы на этапе составления модели влияют на последующее приближенное решение получающейся системы уравнений.

Рассмотрим три варианта математического описания такого гидромеханического устройства [3; 6]. В модели А наиболее полно учитываются сравнительно малые по величине динамические факторы: сжимаемость рабочей среды и инерционность движения (масса)

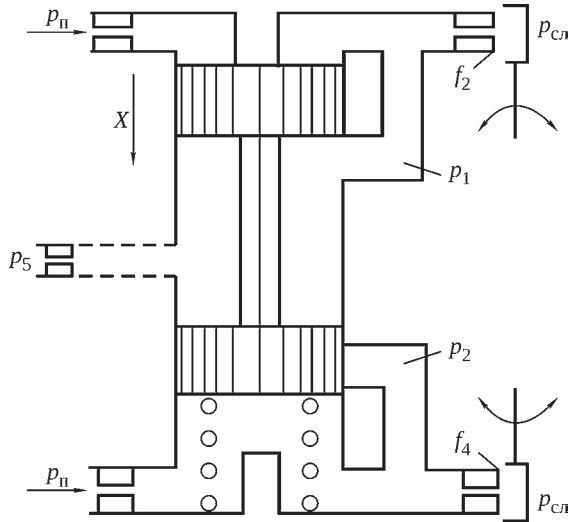


Рис. 1. Гидромеханический селектор

золотника. В модели Б этими малыми динамическими факторами пренебрегают и учитывается только эффект вытеснения жидкости поршнем золотника. Модель В статическая: в ней совсем не учитываются динамические эффекты.

Обозначения, принятые в статье:  $p_n$  – давление питания, Па;  $p_{сл}$  – давление в полости слива, Па;  $p_1, p_2$  – давления во внутренних полостях, Па;  $X$  – перемещение золотника, м;  $F_3$  – площадь золотника, м<sup>2</sup>;  $m_3$  – масса золотника, кг;  $C_{пр}$  – жесткость пружины, Н/м;  $C_1, C_2$  – коэффициенты емкости соответствующих полостей, м<sup>3</sup>/Па;  $a_i$  – коэффициенты перевода ( $i=1...4$ ), м<sup>2</sup>/(Па<sup>1/2</sup>·с);  $f_i$  – площадь сечений.

В моделях записаны по два уравнения баланса расходов (уравнения сохранения массы) и баланса сил (уравнения движения). Уравнения записаны с некоторыми упрощениями, в частности не учитываются силы трения, поток жидкости из межпоршневой полости золотника в полость с давлением  $p_5$  (штриховые линии на рис. 1).

Входными параметрами (задаваемыми или вычисляемыми предварительно) для каждой из моделей являются  $p_n, p_{сл}, a_2 = a_2(f_2), a_4 = a_4(f_4)$ , а выходными (искомыми) параметрами –  $X, p_1$  и  $p_2$ .

$$m_3 \frac{d^2 x}{dt^2} = F_3(p_1 - p_2) - C_{пр} X; \quad (1)$$

$$C_1 \frac{dp_1}{dt} = a_1 \sqrt{p_n - p_1} - a_2 \sqrt{p_1 - p_{сл}} - F_3 \frac{dx}{dt}; \quad (2)$$

$$C_2 \frac{dp_2}{dt} = a_3 \sqrt{p_n - p_2} - a_4 \sqrt{p_2 - p_{сл}} + F_3 \frac{dx}{dt}. \quad (3)$$

При интегрировании системы уравнение (1) обычно заменяют двумя дифференциальными уравнениями первого порядка (приведение системы к нормальной форме Коши) путем введения дополнительной переменной  $Z$ :

$$\frac{dx}{dt} = Z; \quad (1a)$$

$$m_3 \frac{dZ}{dt} = F_3(p_1 - p_2) - C_{пр} X. \quad (16)$$

И в уравнениях (2) и (3), в правой части, вместо  $dx/dt$  ставят  $Z$ .

Модель Б получают из модели А при  $m_3 = C_1 = C_2 = 0$  после некоторых простых преобразований.

$$p_1 - p_2 = \frac{C_{пр} X}{F_3}; \quad (4)$$

$$a_1 \sqrt{p_n - p_1} - a_2 \sqrt{p_1 - p_{сл}} + a_3 \sqrt{p_n - p_2} - a_4 \sqrt{p_2 - p_{сл}} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_1 \sqrt{p_n - p_1} - a_2 \sqrt{p_1 - p_{сл}}}{F_3}. \quad (6)$$

В качестве уравнения (6) можно также использовать выражение для  $dx/dt$ , получаемое из (3) при  $C_2 = 0$ .

Модель В получают из модели А при пренебрежении влиянием всех членов с производными по времени. Несколько изменяя порядок следования уравнений, получаем

$$a_1 \sqrt{p_n - p_1} - a_2 \sqrt{p_1 - p_{сл}} = 0; \quad (7)$$

$$a_3 \sqrt{p_n - p_2} - a_4 \sqrt{p_2 - p_{сл}} = 0; \quad (8)$$

$$X = \frac{F_3}{C_{пр}} (p_1 - p_2). \quad (9)$$

В соответствии с различной степенью учета динамических факторов частотные диапазоны достоверного описания динамики рассматриваемого агрегата у трех моделей будут разные. Наиболее широкий диапазон имеет модель А, наименьший – модель В. Какой из приведенных типов модели является наиболее подходящим с этой точки зрения, определяется целями проводимого моделирования агрегата. Конкретные величины частотных диапазонов для заданных размеров и других параметров селектора здесь не приводятся, так как выписанные модели предназначены в данном параграфе лишь для иллюстрации отличий в методах последующего их решения. Остановимся на этих методах.

Решение уравнений модели А состоит в интегрировании системы, содержащей только дифференциальные уравнения. Для этого применяют одну из разностных схем численного интегрирования. При использовании таких алгоритмов интегрирования значения интегрируемых переменных  $Y$  на каждом шаге по времени вычисляются по соотношению

$$y_{k+1} = y_k + h \tilde{y}_k. \quad (10)$$

Здесь  $h$  – величина шага интегрирования;  $k$  – номер

текущего шага. В качестве переменных  $Y$  в модели А выступают  $X$ ,  $p_1$ , и  $p_2$ . В простейшем методе Эйлера  $\bar{y}_k \equiv \dot{y}_k$  – производной на  $k$ -м шаге. В других явных схемах  $\bar{y}_k$  представляют собой взвешенную производную, вычисляемую по нескольким промежуточным подшагам (в одношаговых алгоритмах типа Рунге – Кутты) или по значениям производных на предыдущих шагах (многошаговые алгоритмы типа Адамса).

В результате значения всех интегрируемых переменных, т.е.  $X$ ,  $p_1$ , и  $p_2$ , вычисляются непосредственно по значениям параметров модели на текущем или предшествующих шагах. Теперь они могут быть подставлены в правые части уравнений модели А, по ним будут вычислены величины производных на новом,  $(k + 1)$ -м шаге, и затем операцию интегрирования повторяют. Весь цикл повторяют нужное число раз, чтобы суммарный интеграл шагов по времени соответствовал требуемому.

Таким образом, сам алгоритм счета в этом случае дает явные выражения для подсчета искомым переменных, обеспечивая так называемую вычислительную развязку физически взаимосвязанных параметров модели (смысл этого термина станет яснее при сравнении с процессом счета в модели Б).

В принципе описанную вычислительную развязку можно осуществлять всегда путем учета малых динамических факторов, для всех (или иногда почти всех) искомым параметров модели будут составляться дифференциальные уравнения. Однако на практике наличие в моделях малых динамических коэффициентов вынуждает для удовлетворения условий устойчивости и точности численного интегрирования выбирать очень мелкий шаг интегрирования. В результате общее количество шагов в требуемом интервале физического времени исследуемого процесса сильно возрастает и, соответственно, растет время счета на ЦВМ, что не всегда приемлемо.

Для преодоления такого рода ограничения иногда целесообразно производить искусственное завышение величин уже учтенных малых динамических параметров. Допустимая степень этого завышения должна быть ограничена так, чтобы завышение, позволяя увеличить шаг интегрирования, вместе с тем не приводило к искажению динамических свойств модели в интересующем исследователя диапазоне частот. Дополнительно этот вопрос освещен ниже.

При решении уравнений модели Б специфика состоит в том, что система уравнений этой модели является смешанной: дифференциально-алгебраической. Проводя, как и в модели А, интегрирование дифференциальных уравнений по явному численному алгоритму, получим значение переменных  $x_i$  на текущем шаге:

$$x_{k+1} = x_k + h\bar{x}_k. \quad (11)$$

Поставляя его в правую часть уравнения (4), полу-

чаем тогда для других искомым переменных,  $p_1$  и  $p_2$ , систему из двух алгебраических уравнений (4) и (5). После вычисления  $p_1$  и  $p_2$  подсчитывается правая часть уравнения (6), и, зная значение производной  $\bar{x}_k \equiv \dot{x}_k$ , можно произвести следующий шаг интегрирования по времени, затем весь цикл повторяется.

Таким образом, в модели Б на каждом шаге интегрирования возникает необходимость решения системы алгебраических уравнений для  $p_1$  и  $p_2$ . Эта система нелинейная, и явных выражений для переменных  $p_1$  и  $p_2$  определить практически невозможно. Именно поэтому здесь (в отличие от процесса решения в модели А) не обеспечивается «вычислительная развязка» взаимосвязи между  $p_1$  и  $p_2$ .

Решение совместных уравнений (4) и (5) относительно  $p_1$  и  $p_2$  производят обычно итерационными методами. При этом могут возникать проблемы со сходимостью итерационных процессов, и их обычно следует применять, если две-три итерации достаточны для получения приемлемой точности. Аналитическое решение уравнения (5) относительно  $p_1$  (или  $p_2$ ) после подстановки туда выражения для  $p_2$  (или соответственно  $p_1$ ) из (4) и после преобразования его в уравнение четвертой степени путем последовательного возведения его частей в квадрат также трудоемко и требует проверки дополнительных логических условий для исключения посторонних корней, порождаемых таким преобразованием.

Иногда отмеченные выше сложности решения системы уравнений (4) и (5) пытаются облегчить следующим образом. Предполагая, что в течение одного временного шага искомым давления  $p_1$  и  $p_2$  меняются мало, значение одного из этих давлений берут из предыдущего шага. Например, если уравнение (4) использовать для  $p_1$  на  $(k + 1)$ -м шаге, используя при этом значение  $p_2$  с  $k$ -го шага:

$$p_1^{k+1} = p_2^k + \frac{C_{np}}{F_3} X^{k+1}, \quad (12)$$

то, подставив эту величину  $p_1$  в уравнение (5), можно решить последнее относительно  $p_2$ , принимая его за  $p_2^{k+1}$ . При этом уравнение (5) будет сводиться к квадратному уравнению относительно  $p_2$  и, следовательно, процесс счета как бы облегчается. Таким образом, вместо совместного определения  $p_1^{k+1}$  и  $p_2^{k+1}$ , одновременно удовлетворяющих уравнениям (4) и (5), производится подмена этого решения предварительно близким к нему паллиативом. Такой вычислительный прием будем называть передергиванием на шаг. Оно может вносить искажения в вычислительный процесс, подробнее о которых будет сказано ниже.

При решении уравнений модели В искомым параметры  $p_1$ ,  $p_2$  и  $X$  вычисляются последовательно в том

порядке, как записаны уравнения модели, каждый из своего уравнения. Уравнение (7) дает квадратное уравнение относительно  $p_1$ , а уравнение (8) – такое же относительно  $p_2$ . Значение положения золотника находим из уравнения (9), поскольку входящие в его правую часть параметры  $p_1$  и  $p_2$  уже определены из предыдущих уравнений.

Следовательно, в этой чисто статической модели селектора так же, как и в модели А, имеет место вычислительная развязка взаимозависимых искомым переменных. Однако такая статическая модель имеет ограниченную область применения при исследовании динамики. Кроме того, например, при усложнении модели для случая, когда положение золотника селектора таково, что он частично перекрывает проходное сечение канала (см. рис. 1), появляется дополнительное уравнение для баланса расходов в межпоршневой полости золотника и чисто статическая модель уже теряет свойство вычислительной развязки. Тогда как «чисто динамическая» модель, построенная по типу модели А, это свойство сохраняет.

Таким образом, с точки зрения последующего численного решения у каждого из рассмотренных видов моделей имеются свои положительные стороны и недостатки. При этом закономерности, наблюдавшиеся на сравнительно простых моделях, сохраняются и для больших моделей систем автоматического управления (САУ) ГТД. Поэтому на практике выработку подхода к моделированию при решении конкретной задачи обычно строят на основе разумного компромисса между сложностью и гибкостью структуры модели, с одной стороны, и приемлемой трудоемкостью ее решения на имеющейся в распоряжении исследователя ЦВМ, с другой стороны. Естественно, что на этот подход оказывает влияние как целевое предназначение модели, так и опыт, приобретаемый в процессе работы с моделями данного вида.

В заключение скажем о примерной потребной точности численного решения исходной системы. В связи с приближенностью описания некоторых физических процессов и с учетом погрешностей в задаваемых характеристиках отдельных элементов допустимую вычислительную погрешность принимаем следующей: статическую – 0,2...1%, динамическую – до 5% в случае аperiodических (неколебательных) переходных процессов и до 10% по частоте и амплитуде в случае колебательных процессов.

## Выбор алгоритма и шага интегрирования

Некоторые вопросы численного интегрирования, которым посвящена настоящая статья, рассмотрены в работах [7–9].

При численном интегрировании производят замену исходных дифференциальных уравнений приближенными разностными соотношениями и осуществляют переход от непрерывных процессов к дискретным. В результате такой аппроксимации свойства исходной системы дифференциальных уравнений воспроизводятся в численном решении с искажениями, характер и степень которых зависят от используемой разностной схемы (алгоритма интегрирования) и величины шага интегрирования. Закономерности такого искажения наглядно интерпретируются с помощью плоскости корней.

Далее предполагают, что система нелинейных дифференциальных уравнений приведена к нормальной форме Коши (с производными в левой части):

$$\frac{dY}{dt} = f(Y, t), \quad (13)$$

где  $Y$  и  $f$  – векторы переменных системы и их производных (размерности  $n$ );  $t$  – время.

Динамические свойства такой системы локально во времени можно характеризовать собственными значениями  $\lambda_j$  матрицы производных (якобиана системы)  $J = \|\partial f / \partial Y\|$ , получаемой в результате линеаризации уравнений системы (13) при текущем  $t$ . В случае линейной и однородной системы, когда  $f(Y, t) = AY$  (где  $A$  – матрица размерности  $n \times n$ ),  $J = A$ . При этом, если в линейной системе коэффициенты постоянны, то характеристические корни  $\lambda_j$  являются константами (в общем случае комплексными  $\lambda_j = \text{Re}\lambda_j + i\text{Im}\lambda_j$ ) и занимают фиксированные места на плоскости корней, а их местоположение однозначно определяет качественные показатели соответствующих каждому из этих корней составляющих решения (их степень затухания, частоту колебаний и т.п.). В нелинейной системе значения  $\lambda_j$  изменяются в процессе решения, т.е.  $\lambda_j = \lambda_j(t)$ , и изображающие их плоскости корней точки перемещаются по некоторым траекториям.

При численном интегрировании непрерывных систем влияние разностного алгоритма на свойства получаемого решения сводится к искажению свойства плоскости корней путем изменения протекания сетки линий с качественными показателями решения. В результате составляющие общего решения, связанные с разными собственными значениями исходной системы дифференциальных уравнений, дают в численном решении слагаемые, отличные от соответствующего слагаемого в непрерывном решении. Степень вносимого искажения зависит от местоположения исходного собственного значения  $\lambda_j$  из плоскости корней, от выбранного разностного алгоритма и применяемого шага интегрирования.

В таблице приведены формулы ряда распространенных одношаговых алгоритмов интегрирования типа Рунге – Кутты, а также показатели требуемых операций

и затрат памяти ЦВМ при реализации этих алгоритмов в программе ( $h$  – шаг интегрирования по времени;  $t_k = kh$ ;  $y_k = y(t_k)$ ;  $n$  – число дифференциальных уравнений в системе (13), порядок системы).

Для тех же самых методов на рис. 2 представлены наиболее важные характеристики алгоритмов интегрирования, получаемые в плоскости корней области устойчивости и области точности. С их помощью можно определять, каким образом следует обеспечивать устойчивость и точность воспроизведения решения исходной системы при ее численном интегрировании.

Для устойчивости процесса численного интегрирования посредством конкретного алгоритма необходима такая величина шага  $h$ , чтобы на протяжении всего интервала интегрирования по времени все значения  $h\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), где  $\lambda_j$  – текущие собственные значения якобиана системы, находились внутри области устойчивости соответствующего алгоритма (см. рис. 2,а). Так, для устойчивого счета методом Эйлера при известных величинах  $\lambda_j$  шаг интегрирования  $h$  должен быть

выбран таким, чтобы значения  $h\lambda_j$  попадали в круг единичного радиуса с центром в точке  $(-1, 0)$ . В размерной плоскости корней  $\lambda_j$  область устойчивости разностного алгоритма Эйлера является кругом радиуса  $1/h$  с центром в точке  $(-1/h, 0)$ , т.е. охватывает лишь часть левой полуплоскости, служащей областью устойчивости при непрерывном решении. В этом и состоит искажение формы и размеров границы устойчивости на плоскости корней алгоритмом Эйлера при конечной величине шага интегрирования  $h \neq 0$ . При  $h \rightarrow 0$  такой круг постепенно охватывает всю левую полуплоскость, приближаясь к истинной области устойчивости. (На рис. 2 и рис. 3 не приводятся нижние половины фигур, зеркально-симметричные относительно действительной оси  $\text{Re}$ .)

Для других алгоритмов типа Рунге – Кутты области устойчивости имеют вид более сложных фигур, с лучшей аппроксимацией мнимой оси вблизи начала координат, чем у метода Эйлера. Как видно на рис. 2,а, по мере роста порядка аппроксимации области устойчивости одношаговых методов расширяются (когда методы

**Таблица.** Некоторые схемы алгоритма численного интегрирования и их показатели

Метод	Порядок аппроксимации	Число подсчетов правых частей на каждом шаге $N_f$	Число операций в формуле метода $N_y$	Затраты памяти для элементов массивов $m$
Метод Эйлера: $y_{k+1} = y_k + hf(y_k, t_k)$	1	1	2	$2n$
Метод РК2 (модифицированный метод Эйлера): $F_{1/2} = f\left(y_k + F_1 \frac{h}{2}, t_k + \frac{h}{2}\right)$ или $y_{k+1} = y_k + hF_{1/2}$ , где $F_1 = f(y_k, t_k)$ ; $F_2 = f(y_k + F_1 h, t_k + h)$ ; $F_{1/2} = f\left(y_k + F_1 \frac{h}{2}, t_k + \frac{h}{2}\right)$	2	2	5...6	$(2+3)n$
Метод РК4 (классический): $y_{k+1} = y_k + h \frac{F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4}{6}$ , где $F_1 = f(y_k, t_k)$ ; $F_2 = f\left(y_k + F_1 \frac{h}{2}, t_k + \frac{h}{2}\right)$ ; $F_3 = f\left(y_k + F_2 \frac{h}{2}, t_k + \frac{h}{2}\right)$ ; $F_4 = f(y_k + F_3 h, t_k + h)$	4	4	15...30	$(3+7)n$
Метод Мерсона (М): $y_{k+1} = y_k + h \frac{F_1 + 4F_4 + F_5}{6}$ , где $F_1 = f(y_k, t_k)$ ; $F_2 = f\left(y_k + F_1 \frac{h}{3}, t_k + \frac{h}{3}\right)$ ; $F_3 = f\left(y_k + \frac{F_1 + F_2}{2} \frac{h}{3}, t_k + \frac{h}{3}\right)$ ; $F_4 = f\left(y_k + \frac{F_1 + 3F_3}{4} \frac{h}{2}, t_k + \frac{h}{2}\right)$ ; $F_5 = f\left(y_k + \frac{F_1 - 3F_3 + 4F_4}{4} h, t_k + h\right)$	4	5	18...42	$(4+7)n$

*Примечание.* Значения  $N_y$  и  $m$  даны в таблице с разбросом, отражающим показатели различных подпрограмм интегрирования.

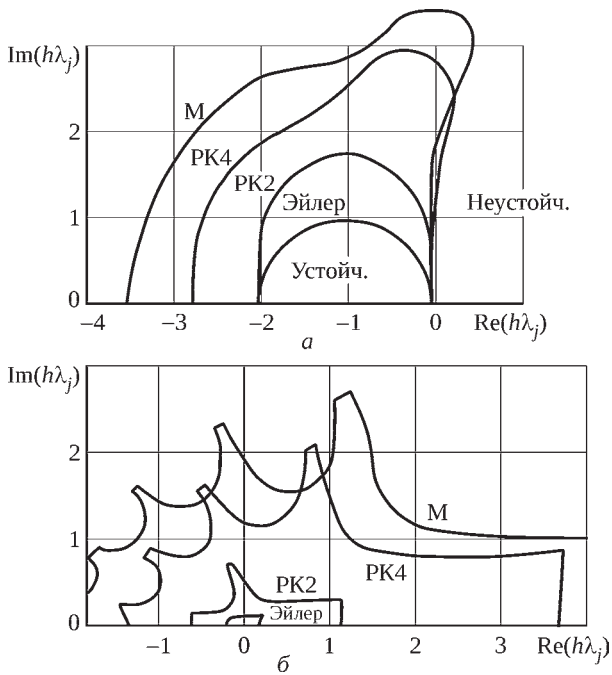


Рис. 2. Плоскость корней  $h\lambda_j$  области устойчивости (а) и области точности (б)

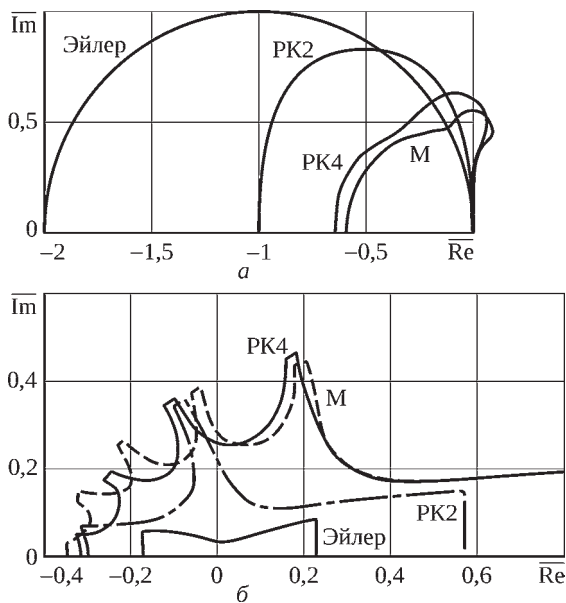


Рис. 3. Плоскость корней  $h\lambda_j/N_f$  области устойчивости (а) и области точности (б)

сравниваются при одинаковом шаге интегрирования) и даже могут частично захватывать правую полуплоскость (метод Рунге – Кутты четвертого порядка и метод Мерсона). В последнем случае характер искажения, вносимого численным алгоритмом в точное решение, может меняться на прямо противоположный. Если для методов Эйлера и РК2 устойчивая система при численном решении может вести себя как неустойчивая (когда характеристические корни  $h\lambda_j$  окажутся хотя и в левой полуплоскости, но вне областей устойчивости этих методов), то для методов РК4 и Мерсона может возникать

и обратная ситуация, когда численное решение будет устойчивым несмотря на неустойчивость исходной системы.

Рассмотрим в качестве примера численное интегрирование уравнения

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = 0 \text{ при } x(0) = x_0 \quad (14)$$

с шагом  $h = 2\tau$  методами Эйлера и РК2. Для этого уравнения характеристический корень  $\lambda_j = -1/\tau$  и, следовательно,  $h\lambda_j = -h/\tau = -2$ . Для обоих методов точка  $h\lambda_j = -2$  расположена на границе области устойчивости (см. рис. 2,а). Но характер искажения решения в этой точке у двух рассматриваемых алгоритмов разный. Для метода Эйлера в точке  $h\lambda_j = -2$  искаженное собственное значение  $h\lambda_{jD} = \ln(1 + h\lambda_j) = i\pi$  и, соответственно, численное решение в кратных шагу интегрирования точках  $t = kh$  имеет вид

$$x_D(t) = x(kh) = x_0 e^{\lambda_{jD} t} = x_0 e^{i\pi k} = x_0 \cos(\pi k), \quad (15)$$

т.е. имеет вид шаговых колебаний с периодом  $T_D = -2h$  и амплитудой равной  $x_0$ . Здесь и далее индексом «D» помечены параметры (собственные значения, период и т.д.) дискретного численного решения, с тем чтобы отличить их от аналогичных параметров точного непрерывного решения.

Для метода РК2 (метода Рунге – Кутты второго порядка) искаженное значение при  $h\lambda_j = -2$

$$h\lambda_{jD} = \ln(1 + h\lambda_j + h^2 \lambda_j^2 / 2) = 0 \quad (16)$$

и соответствующее решение имеет вид

$$x_D(kh) = x_0 e^{\lambda_{jD} t} = x_0 e^{0k} = x_0 = \text{const.} \quad (17)$$

В обоих случаях численные решения не имеют ничего общего с точным решением уравнения (14), имеющим вид затухающей экспоненты, и равным в тех же точках  $t = kh$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ )

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_j t} = x_0 e^{-t/\tau} = x_0 e^{-hk/\tau} = x_0 e^{-2k}. \quad (18)$$

Эти примеры показывают, что при выбранном соотношении шага и характеристического корня уравнения (14) получается сильное искажение искомого решения. Допустимые величины искажений достигаются в плоскости корней, где погрешности воспроизведения собственных значений системы невелики.

Такие области плоскости корней, называемые областями точности, для сравниваемых одношаговых алгоритмов приведены на рис. 2,б. Эти области определены из следующего условия. Искажение по характерным динамическим параметрам для различных составляющих решения (т.е. для различных собственных значений) не должно превышать  $\pm 10\%$  по постоянным времени для аperiodических составляющих (с действитель-

ными  $\lambda_j$ ) и  $\pm 10\%$  по собственным частотам и  $\pm 0,01$  по коэффициентам демпфирования для колебательных составляющих (с комплексными  $\lambda_j$ ).

Представление о соотношении указанных погрешностей воспроизведения динамических показателей с фактическими ошибками в численном решении дают следующие оценки для простейших уравнений. При решении уравнения (14) с искажением постоянной времени на 10% (например, в методе Эйлера это получается при  $h\lambda_j \approx -0,2$ , т.е. при  $h = \tau/5$ ) максимальная ошибка расчета в переходном процессе составляет примерно 4% от величины  $x_0$ . Для колебательного звена (с коэффициентом демпфирования  $\xi = 0$ ) ошибка в воспроизведении  $\xi$  на  $\pm 0,01$  приводит, соответственно, к затуханию колебаний на 6% за период (вместо сохранения постоянной величины амплитуды в точном решении при ступенчатом входном воздействии).

Максимальные значения ошибок, оговоренные выше в условиях выделения областей точности алгоритмов на плоскости  $h\lambda_j$ , реализуются лишь на границах этих областей. Внутри же областей точности при  $h\lambda_j \rightarrow 0$  стремятся к нулю и погрешности воспроизведения динамических показателей решения. Эта закономерность отражает свойство только собственно разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, и при расчетах на ЦВМ справедливы лишь величины  $|h\lambda_j| \geq \delta$ , где  $\delta$  – относительная ошибка представления чисел в ЦВМ, вызываемая необходимостью их округления вследствие конечной разрядности мантиссы. Например, при вычислениях с одинарной точностью в арифметике с плавающей запятой величина  $\delta = 10^{-6}$ . Поэтому интегрировать дифференциальные уравнения любым методом с очень малым шагом, при котором хотя бы для одного корня  $|h\lambda_j| < 10^{-6}$ , в данном случае нельзя, так как чрезмерно большой становится ошибка, вызываемая эффектами округления.

В результате при необходимости точного воспроизведения при численном интегрировании всех составляющих решения системы дифференциальных уравнений шаг интегрирования  $h$  должен выбираться так, чтобы, с одной стороны, для наиболее удаленных от начала координат характеристических корней  $\lambda_j$  значения  $h\lambda_j$  не выходили за пределы области точности используемого алгоритма, а, с другой стороны, для наименьших по модулю корней величины  $|h\lambda_j|$  не становились меньше, чем величина  $\delta$ .

Таким образом, существует ограничение на максимально допустимый разброс характеристических корней решаемой системы, при котором еще с приемлемой точностью посредством данного алгоритма на данной ЦВМ можно проводить численное интегрирование. Разброс корней характеризуют показателем жесткости дифференциальной системы  $\rho = \max|\lambda_j| / \min|\lambda_j|$ .

Указанное ограничение тогда можно записать в виде  $\rho \leq \rho^*$ , где  $\rho^* = |h\lambda_j|_{\text{обл.точн}} / \delta_{\text{ЦВМ}}$ . Здесь  $|h\lambda_j|_{\text{обл.точн}}$  – величина модуля  $h\lambda_j$  на границе области точности алгоритма в безразмерной плоскости корней. Точка на границе выбирается в том угловом направлении, в котором расположен ограничивающий корень. Для метода Эйлера при одинарной точности счета (когда  $\delta \approx 10^{-6}$ ) получается  $\rho^* \approx 10^4 \dots 10^5$  (в зависимости от того, где располагается удаленный корень – вблизи мнимой или вблизи действительной оси и на ней). Возможность такого ограничения следует принимать во внимание в процессе учета сильно различающихся по инерционности динамических факторов на этапе составления модели системы регулирования.

При проведении расчетов на ЭВМ с двойной точностью вычислений (когда  $\delta \approx 10^{-15}$ ) величина  $\rho^*$  оказывается столь большой, что описанное выше ограничение по минимально допустимой величине шага интегрирования  $h$  в задачах по моделированию САУ ГТД практически никогда не достигается и его можно не учитывать.

При наличии оценки характеристических корней решаемой системы диаграммы (см. рис. 2 и рис. 3) позволяют выбирать оптимальный метод интегрирования из числа рассмотренных и для конкретного метода выбирать, соответственно, шаг интегрирования.

На рис. 4 показано расположение корней характеристического уравнения для системы регулирования частоты вращения ротора высокого давления двухвального ТРДД при ее описании в линейном приближении. Система уравнений имеет четвертый порядок: два порядка определяются динамикой роторов двигателя, а два других – регулятором. Корни на рис. 4 приведены для двух режимов работы двигателя: максимального (черные кружки) и малого газа (белые кружки). Нижняя полуплоскость корней на графике не приводится. Стрелки показывают направление перемещения корней при переходе от максимального режима к режиму малого газа.

При решении уравнений рассматриваемой системы методом Эйлера для обеспечения попадания всех  $h\lambda_j$  в область точности алгоритма достаточно выбрать шаг интегрирования  $h = 0,005$  на максимальном режиме (ограничивают комплексные корни  $\lambda_j = 10,2 \pm 10,5i$ ) и  $h = 0,01$  на режиме малого газа (ограничивает удален-

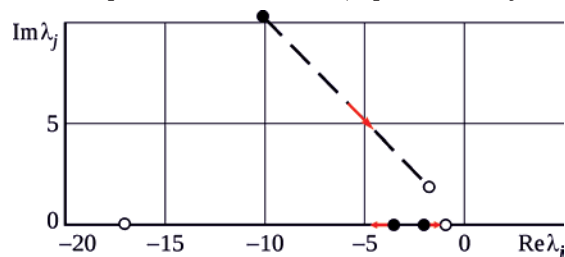


Рис. 4. Расположение корней характеристического уравнения

ный действительный корень  $\lambda_j = -17$ ). Для малого газа показатель жесткости системы  $\rho = 17/0,9 \approx 20$ , что весьма далеко от ограничения по  $\rho^* = 10^5$ .

На рис. 2 различные алгоритмы сопоставляются при одинаковом для всех методов шаге интегрирования. Видно, что при этом условия методы более высокого порядка имеют несколько большие области устойчивости (см. рис. 2,а) и заметно более широкие области точности (см. рис. 2,б). Однако, как следует из таблицы, это достигается за счет ощутимого увеличения вычислительной работы: растет число подсчетов правых частей дифференциальных уравнений ( $N_f$ ) и число элементарных операций по реализации собственно алгоритма ( $N_y$ ). Следовательно, растет суммарное время счета на ЦВМ, не говоря уже о росте потребного объема памяти.

В связи с этим более правильным является сопоставление тех же одношаговых алгоритмов при выравненных вычислительных затратах. Это можно осуществить путем нормирования трудоемкости решения по отношению к однократному вычислению правых частей системы уравнений, если вместо безразмерной плоскости корней  $h\lambda_j$  рассматривать плоскость  $h\lambda_j/N_f$ . При этом, так как для алгоритмов Рунге – Кутты четвертого порядка и Мерсона количество собственных арифметических операций в формулах метода достаточно велико ( $N_y \approx 15 \dots 40$ ) и сопоставимо с числом операций, происходящих в общей системе в среднем на одно дифференциальное уравнение в цикле вычисления производных, то для этих алгоритмов величины  $N_f$  завышаются (по отношению к приведенным в таблице) до значений  $N_f = 4, 5$  для методов РК2, РК4 и  $N_f = 6$  для метода Мерсона. Таким образом, например, оценка выходных характеристик метода Эйлера по сравнению с методами РК2, РК4 и Мерсона ведется при шаге Эйлера соответственно в 2, 4, 5 и 6 раз более крупном.

Результаты такого нормированного сравнения приведены на рис. 3. При сопоставимых затратах машинного времени области точности для рассматриваемых алгоритмов сближаются (см. рис. 3,б). Преимущество методов более высокого порядка заметно сказывается в основном при наличии в системе характеристических корней близких к мнимой оси, т.е. для плохо демпфированных систем. В этом случае более эффективно (по затратам машинного времени) проводить интегрирование, например, методом РК2, а не методом Эйлера, так как для обеспечения равной точности шаг в РК2 можно выбрать более крупным.

Из сопоставления областей устойчивости (в нормированной плоскости корней, см. рис. 3,а) видно, что запасы устойчивости при применении методов низкого порядка (и в частности метода Эйлера) в большей части левой полуплоскости выше, за исключением сектора, прилегающего к оси ординат. Такое свойство дает

определенные вычислительные преимущества, если требования к точности воспроизведения удаленных от начала координат характеристических значений (соответствующих быстрому составляющим решения) невелики. На последнем обстоятельстве и вытекающих из него возможностях более подробно остановимся ниже. Как уже отмечалось, из характеристик группы явных алгоритмов типа Рунге – Кутты (см. рис. 2 и рис. 3) следует, что при проведении численного интегрирования для обеспечения сравнительно точного воспроизведения всех составляющих искомого решения шаг интегрирования  $h$  должен выбираться так, чтобы все значения  $h\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  – порядок системы) попадали в область точности используемого алгоритма. Очевидно, что ограничивают выполнение такого условия, как это было показано выше, наиболее удаленные от начала координат характеристические значения  $\lambda_j$ . Также максимальные по модулю значения  $\lambda_j$  обычно порождаются наименее инерционными из учитываемых в модели динамических элементов или факторов.

Следовательно, в то время как характер и длительность переходного процесса по времени определяется наиболее медленными составляющими решения, выбор величины шага интегрирования диктуется самыми быстрыми составляющими. Особенно остро это противоречие проявляется, когда степень жесткости системы ( $\rho$ ) значительна.

Вместе с тем, если при моделировании системы интерес представляют лишь сравнительно медленные, низкочастотные процессы, то обеспечивать высокую точность воспроизведения наиболее быстрых составляющих решения необязательно. Достаточно лишь обеспечить, чтобы при выбранном шаге  $h$  величины  $h\lambda_j$  этих составляющих не выходили за область устойчивости применяемого алгоритма. Поэтому, чем шире при тех же вычислительных затратах эта область, тем лучше. Именно поэтому в описанной ситуации метод Эйлера может оказаться выгоднее, чем метод Рунге – Кутты четвертого порядка.

В той же ситуации возможно и искусственное завышение малых динамических факторов, способствующее приближению наиболее удаленных характеристических корней к началу координат. Тогда шаг интегрирования может быть выбран крупнее и машинное время счета сократится.

Завышение малых динамических факторов (т.е. подтягивание к началу координат сильно удаленных характеристических корней) должно производиться до некоторых пределов с тем, чтобы не вносить в решение заметных искажений в диапазоне существенных для задачи низких частот  $\omega \leq \omega_{\text{суц}}$ . Для этого обычно достаточно сохранять 10...30-кратный запас по удаленности приближаемых корней от области  $\omega_{\text{суц}}$ , т.е. сохра-



нять  $|\lambda_j|_{\max} \approx (10 \dots 30)\omega_{\text{сущ}}$ . Например, если  $\omega_{\text{сущ}} \leq 30$ , то допустимый интервал значений модулей характеристических корней, порождаемых завышенными малыми параметрами составляет  $|\lambda_j|_{\max} \approx 300 \dots 1000$ . Тогда при шаге интегрирования  $h = 0,001$  с имеем  $h\omega_{\text{сущ}} \leq 0,03$ , что обеспечивает попадание зоны существенных частот в область точности алгоритма Эйлера (см. рис. 2, б). Величина же  $h|\lambda_j|_{\max}$  составит тогда  $0,3 \dots 1$ , и, следовательно, если система достаточно демпфирована, то все ее собственные значения попадают в область устойчивости алгоритма Эйлера. В результате, с одной стороны, исключаются заметные искажения процессов в области низких частот, а с другой стороны, не будет нарушаться устойчивость численного интегрирования.

Завышение в разумных пределах учтенных в модели малых динамических факторов, приводящее к приближению сильно удаленных корней и открывающее возможности по снижению вычислительных затрат на интегрирование, является ничуть не менее правомерным приемом, чем пренебрежение этими же, имеющимися в моделируемой физической системе факторами, означающее удаление или увод соответствующих характеристических корней в бесконечность.

Для оценки влияния искажений, вносимых в решение вследствие преднамеренного завышения малых динамических параметров (а также для выбора степени такого завышения), рекомендуется проводить два-три контрольных расчета для типичных вариантов переходных процессов. В этих расчетах должен быть значительно уменьшен (в  $5 \dots 10$  раз по отношению к выбранному) шаг интегрирования и соответственно уменьшены (во столько же раз) величины завышенных динамических параметров. Отсутствие существенных отличий в низкочастотных составляющих решения служит подтверждением правильности выбора шага и степени завышения параметров.

Иногда оказывается, что максимальные по модулю собственные значения порождаются динамическими свойствами отдельного элемента и, как правило, не зависят от значений других элементов. В таком случае на каждом шаге счета общей системы интегрирование дифференциальных уравнений данного элемента может производиться с шагом в несколько раз более мелким, чем в остальной части системы. При этом переменные параметры, являющиеся для данного элемента внешними, принимаются на время счета внутреннего цикла неизменными.

Существуют стандартные программы численного интегрирования дифференциальных уравнений с автоматическим управлением величиной шага интегрирования, например в алгоритмах Мерсона и Рунге – Кутты четвертого порядка. Такое управление обычно основывается не на прямых оценках расположения корней яко-

биана системы, а на оценках величины так называемой локальной ошибки интегрирования. Недостатком таких программ является сильное измельчение шага интегрирования при появлении в системе больших по модулю характеристических корней. Это приводит к сильному затягиванию времени счета, тогда как часто нет необходимости в точном воспроизведении вклада в решение от высокочастотных составляющих.

В *многошаговых явных методах* (типа метода Адамса и т.п.) использование в формуле алгоритма одновременно ряда уже вычисленных на предыдущих шагах значений интегрируемых переменных приводит к появлению в численном решении паразитных составляющих, которые служат причиной заметного сокращения областей устойчивости алгоритмов. Это сокращение тем сильнее, чем выше порядок аппроксимации разностной схемы. Поэтому при использовании таких алгоритмов приходится выбирать достаточно малый шаг интегрирования, и в результате при сопоставимой с методом Эйлера точности расчетов переходных процессов оказывается, что выгод в отношении затрат машинного времени эти алгоритмы не приносят и, соответственно, не компенсируют неудобств, вызванных необходимостью предварительного вычисления нескольких начальных точек решения каким-либо иным методом. К тому же последнюю процедуру в целях минимизации искажений, вносимых паразитными составляющими, требуется производить всякий раз в начале движения отдельных элементов системы от установившегося режима, например при сходе подвижных элементов регуляторов с механических упоров.

*Неявные численные методы* интегрирования обладают очень широкой областью устойчивости. Как правило, ею охватывается вся левая полуплоскость корней, что является положительной стороной этих алгоритмов, и значительная часть правой полуплоскости, что является их недостатком. Он заключается в том, что если на отдельных этапах переходного процесса возможно попадание одного или нескольких характеристических корней системы в правую полуплоскость, т.е. в область неустойчивых решений, то при применении неявных алгоритмов в процессе численного моделирования может быть совсем не обнаружена возможность появления в реальной системе слабоустойчивых или сильноколебательных режимов (пусть даже и кратковременных). В то же время области точности неявных методов имеют почти такие же размеры, как у явных алгоритмов типа Рунге – Кутты с одинаковой по порядку аппроксимации формулой. Поэтому преимущество неявных методов в отношении расширенной области устойчивости оказывается полезным, только если не требуется точное воспроизведение в решении составляющих, вносимых сильно удаленными влево характеристическими корнями.

Кроме того, появляются известные трудности и неудобства, связанные со способами решения возникающих в таких алгоритмах неявных нелинейных алгебраических систем уравнений, которые требуется разрешать на каждом шаге интегрирования, т.е. связанные с необходимостью привлечения и обеспечения сходимости итерационных методов (типа метода Ньютона и т.д.). Привлечение же для преодоления этих вычислительных трудностей методов типа «прогноз – коррекция» почти полностью нейтрализуют преимущества неявных алгоритмов в отношении расширенных областей устойчивости. Последние у таких комбинированных методов сужаются до размеров, характерных для методов типа Рунге – Кутты. Так, например, описанный ранее метод РК2 можно рассматривать как простейший метод типа прогноза и коррекции, где прогноз выполняется по методу Эйлера, а коррекция – по неявному методу трапеций.

Уместно дать несколько рекомендаций по организации процесса интегрирования. Дифференциальные уравнения приводятся к нормальной форме Коши (с производными в левой части). Операция интегрирования всех уравнений на один шаг по времени должна осуществляться в едином для всех элементов двигателя цикле. Это необходимо для обеспечения вычислительной развязки контуров, образованных межэлементными связями, и исключения возможности передергивания на шаг. С операции интегрирования целесообразно начинать в программе вычисления в каждый текущий момент времени, т.е. каждый такт общего цикла. Непосредственно за операцией интегрирования производится проверка и коррекция проинтегрированных переменных для приведения в соответствие присущим им физическим ограничениям (например, ограничениям по перемещению органов регулирования и т.п.). Вслед за этим осуществляется вычисление явных алгебраических зависимостей для определения остальных (неинтегрируемых) переменных и подсчет новых значений производных для интегрируемых параметров. Затем весь такт повторяется заново на следующем шаге по времени.

Остановимся на нежелательности появления в процессе вычислений передергивания на шаг. Пример образования такой вычислительной ситуации приведен в предыдущем параграфе. Она состоит в использовании для вычислений вместо требуемого значения какого-либо параметра в текущий момент времени известного значения того же параметра с предшествующего шага, т.е. использование значения  $x(t - h)$  вместо требуемого  $x(t)$ . Такое передергивание часто допускают сознательно, когда, исходя из интуитивного представления о безобидности использования близкого по величине значения, таким путем пытаются обойти необходимость решения каких-то подсистем алгебраических уравне-

ний, возникающую при недостаточно полной вычислительной развязке взаимозависимых параметров или при использовании уравнений в неявном виде. Иногда передергивание на шаг возникает неумышленно, из-за нечетко оговоренной очередности вычисления отдельных параметров.

Передергивание на шаг означает введение в систему дополнительных запаздываний и, как показывает опыт расчетов и аналитические оценки, может иметь неприятные последствия: например, искажение свойств алгоритма интегрирования, вплоть до превращения из устойчивого в неустойчивый, возникновение ложных, медленно нарастающих низкочастотных колебаний параметров. Вместе с тем иногда передергивание на шаг и не вызывает ощутимых динамических погрешностей. В целом же последствия, к которым может приводить наличие такой не очень корректной операции, трудно предсказуемы. Поэтому пользоваться ею для разрешения проблем вычисления следует очень осторожно и по возможности избегать совсем.

## Заключение

При существующих умеренных требованиях к точности воспроизведения переходных процессов и при существенных затратах машинного времени простейший метод Эйлера, по сравнению с более сложными и обладающими более высоким порядком аппроксимации разностными методами, почти не уступает последним в точности и превосходит их по запасам устойчивости численного решения, если исследуемая динамическая система хорошо демпфирована. Для случая слабо демпфированной системы целесообразно использование метода Рунге – Кутты второго порядка. Применение же более сложных методов, и в частности классического метода Рунге – Кутты четвертого порядка, как правило, нецелесообразно.

Оптимизация при выборе метода или шага интегрирования в процессе счета может осуществляться с учетом информации о положении и траекториях перемещения в плоскости корней характеристических значений матрицы производных (якобиана) решаемой системы дифференциальных уравнений. Получение такой информации непрерывно в процессе решения сложно и трудоемко. Однако иметь ее для основных стационарных режимов работы системы и некоторых характерных (критических в вычислительном отношении) переходных режимов очень желательно.

Практика расчетов переходных процессов в САУ с помощью нелинейных поэлементных математических моделей показывает, что метод Эйлера дает достаточно надежные и точные результаты при шаге интегрирования равном 0,001...0,002 с.

---

## Литература

1. Теория автоматического управления силовыми установками летательных аппаратов : Управление ВРД / Ю.С. Белкин, Л.Н. Гецов, Ю.В. Ковчич и др. ; под ред. А.А. Шевякова. М. : Машиностроение, 1976. 344 с.
2. Черкасов Б.А. Автоматика и регулирование воздушно-реактивных двигателей. М. : Машиностроение, 1965. 402 с.
3. Гольберг Ф.Д., Гуревич О.С. Особенности характеристик селектирующего устройства в гидроэлектронных САР ТРДДФ // Автоматическое регулирование двигателей летательных аппаратов : сб. статей под ред. А.А. Шевякова. Вып. 19. ЦИАМ, 1980. (Труды ЦИАМ ; № 895). С. 103–117.
4. Интегральные системы автоматического управления силовыми установками самолетов / Ю.С. Белкин, Б.В. Боев, О.С. Гуревич и др. М. : Машиностроение, 1983. 284 с.
5. Гаевский С.А., Морозов Ф.Н., Тихомиров Ю.П. Автоматика авиационных газотурбинных силовых установок / под общ. ред. А.В. Штоды. М. : Воениздат, 1980. 248 с.
6. Добрынин А.Н. Устройства, обеспечивающие исключение совместной работы нескольких регуляторов в гидромеханических системах ТРД // Автоматическое регулирование двигателей летательных аппаратов : сб. статей под ред. А.А. Шевякова. Вып. 13. ЦИАМ, 1972. (Труды ЦИАМ ; № 519). С. 106–125.
7. Калнин В.М. Частотные методы в теории численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. ЦИАМ, 1975. 81 с. (Труды ЦИАМ ; № 630).
8. Калнин В.М. О применении частотных методов для исследования устойчивости численного интегрирования дифференциальных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1975. Т. 222, № 6. С. 1272–1275.
9. Калнин В.М. Частотные методы оценки погрешностей числового интегрирования дифференциальных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1975. Т. 223, № 1. С. 38–41.

## References

1. Belkin Iu.S., Getsov L.N., Kovachich Iu.V. et al. Teoriia avtomaticheskogo upravleniia silovymi ustanovkami letatel'nykh apparatov: upravlenie VRD [Theory of automatic control of aircraft propulsion systems: control of an air-breathing jet engine] edited by A.A. Sheviakov. Moscow: Mashinostroenie [Mechanical Engineering], 1976. 344 p.
2. Cherkasov B.A. Avtomatika i regulirovanie vozduшно-reaktivnykh dvigatelei [Automation and control of airbreathing jet engines]. Moscow: Mashinostroenie [Mechanical Engineering], 1965. 402 p.
3. Gol'berg F.D., Gurevich O.S. Osobennosti kharakteristik selektiruiushchego ustroistva v gidroelektronnykh SAR TRDDF. Avtomaticheskoe regulirovanie dvigatelei letatel'nykh apparatov [Features of a selector device in hydro-electronic ACSs of afterburning turbofan engines. Automatic control of aircraft engines]. Collection of articles edited by A.A. Shevyakov. Issue 19. CIAM, 1980. (Proceedings of CIAM. No. 895). P. 103–117.
4. Belkin Iu.S., Boev B.V., Gurevich O.S. et al. Integral'nye sistemy avtomaticheskogo upravleniia silovymi ustanovkami samoletov [Integral automatic control systems of aircraft propulsion systems]. Moscow: Mashinostroenie [Mechanical Engineering], 1983. 284 p.
5. Gaevskii S.A., Morozov F.N., Tikhomirov Iu.P. Avtomatika aviatsionnykh gazoturbinnnykh silovykh ustanovok [Automatics of aviation gas turbine propulsion systems] under the general editorship of A.V. Shtoda. Moscow: Voenizdat [Military Publication], 1980. 248 p.
6. Dobrynin A.N. Ustroistva, obespechivaiushchie iskluchenie sovmestnoi raboty neskol'kikh regulatorov v gidromekhanicheskikh sistemakh TRD. Avtomaticheskoe regulirovanie dvigatelei letatel'nykh apparatov [Devices preventing simultaneous operation of several regulators in hydromechanical turbofan systems. Automatic control of aircraft engines]. Collection of articles edited by A.A. Sheviakov. Issue 13. CIAM, 1972. (Proceedings of CIAM. No. 519). P. 106–125.
7. Kalnin V.M. Chastotnye metody v teorii chislennogo integrirvaniia obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Frequency methods in the theory of numerical integration of ordinary differential equations]. CIAM, 1975. 81 p. (Proceedings of CIAM. No. 630).
8. Kalnin V.M. O primeneni chastotnykh metodov dlia issledovaniia ustoichivosti chislennogo integrirvaniia differentsial'nykh uravnenii [Application of frequency methods for studying the stability of numerical integration of differential equations]. Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1975. Vol. 222, no. 6. P. 1272–1275.

- 
9. Kalnin V.M. Chastotnye metody otsenki pogreshnostei chislovogo integrirvaniia differentsial'nykh uravnenii [Frequency methods for estimating errors in a numerical integration of differential equations]. Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1975. Vol. 223, no. 1. P. 38–41.

*Материалы получены редакцией 15.01.2022*