

Оценка усталостной долговечности изделий из композиционных материалов

Каримбаев Т.Д.

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, г. Москва

e-mail: tdkarimbaev@ciam.ru

В работе приведен анализ моделей усталости композиционных материалов. На основе вероятностного анализа остаточной прочности в испытаниях на усталость получено соотношение, позволяющее аналитически построить $S-N$ -кривые (кривые усталости) для композиционных материалов по результатам статических испытаний на прочность, существенно сокращая сроки и стоимость работ. Результаты сравнения предсказанных долговечностей с экспериментальными данными позволяют использовать аналитически построенные $S-N$ -кривые для оценки пределов выносливости композиционных материалов, что особенно важно на стадиях предварительного проектирования, отличающихся недостаточностью экспериментальных данных. Предложен эффективный метод построения кривых усталости для разных значений коэффициента асимметрии цикла нагружения с помощью диаграммы Гудмана.

Ключевые слова: композиционные материалы, сопротивление усталости, долговечность, вероятность разрушения, циклы нагружения, асимметрия нагружения, распределение напряжений, $S-N$ -кривые, диаграмма Гудмана.

Evaluation of fatigue life of products made of composite materials

Karimbaev T.D.

CIAM, Moscow

The paper presents an analysis of fatigue models of composite materials. Based on the probabilistic analysis of the residual strength in fatigue tests, a ratio is obtained that allows to analytically construct $S-N$ curves (fatigue curves) for composite materials based on the results of static strength tests, significantly reducing the time and cost of work. The results of comparing predicted durability with experimental data allow to use analytically constructed $S-N$ curves to estimate fatigue limits of composite materials, which is especially important at preliminary design stages, characterized by insufficient experimental data. An effective method of constructing fatigue curves for different values of the loading cycle asymmetry ratio using the Goodman diagram is proposed.

Keywords: composite materials, fatigue strength, durability, failure probability, loading cycles, load asymmetry, stress distribution, $S-N$ curves, Goodman diagram.

Введение

Оценка усталостной долговечности металлических изделий осуществляется на основе модели безопасной долговечности и/или на основе концепции безопасного развития трещины. Опыт эксплуатации и накопленный объем экспериментальных данных заметно снижают риски при проектировании металлических изделий с требуемой долговечностью. В отличие от металлов композиционные материалы (КМ) представляют собой неоднородную, анизотропную среду, что при перемен-

ных нагрузках приводит к сложному характеру развития технологических дефектов и эксплуатационных повреждений от момента их зарождения и последующей эволюции до исчерпания несущей способности изделий. Существует ряд качественных различий между усталостными свойствами металлов и КМ (рис. 1) [1; 2]. В металлах стадия постепенного и невидимого ухудшения свойств материала (инкубационный период) охватывает почти полный жизненный цикл детали. Процесс развития усталости проходит быстро, без существенного снижения жесткости: послеинкубационный этап



Рис. 1. Усталостное поведение металлических (красный цвет) и композиционных (синий цвет) материалов

начинается с образования мелких трещин, являющихся единственной формой макроскопически наблюдаемых повреждений, постепенный рост и сращивание этих трещин быстро приводят к образованию единственной магистральной трещины и окончательному разрушению конструкции. Поэтому, пока жесткостные характеристики металла детали в инкубационном периоде почти не изменяются, связи между напряжениями и деформациями можно считать линейными и процесс усталости может быть смоделирован в наиболее общих случаях на основе линейного упругого анализа и линейной механики разрушения [3].

В армированных КМ повреждения появляются очень рано (продолжительность инкубационного периода мала). Как отмечает большинство исследователей, повреждение зарождается в материале матрицы в слоях, где направление армирования ортогонально направлению главного напряжения (см., например, [4]). Размер зоны повреждений неуклонно растет в процессе продолжающегося нагружения. При этом могут измениться не только размеры, но и тип повреждений в этих зонах. Так, небольшие трещины в матрице с ростом нагрузки, увеличением продолжительности ее воздействия или с увеличением числа циклов нагружения могут привести к разрушениям на границе раздела материала матрицы и волокна или к расслоениям [5]. Постепенный рост повреждений приводит к ухудшению свойств полимерных КМ (ПКМ), например потере жесткости в поврежденных зонах, снижению собственных частот колебаний деталей или образцов [5]. При этом происходит непрерывное перераспределение напряжений и снижение концентрации напряжений внутри детали. Как следствие, оценка фактического состояния или предсказание конечного состояния (времени и места ожидаемого окончательного разрушения) требует моделирования полного, сложного процесса последовательного изменения поврежденных состояний, с учетом наиболее слабых участков конструкции. Этот процесс продолжается до момента, когда скорость роста повреждений станет критической.

Особенности зарождения и развития несовершенств в КМ рассмотрены во многих работах. Ниже приведен анализ моделей зарождения и развития усталостных повреждений, учитывающих указанные особенности зарождения и развития дефектов в КМ.

Анализ моделей зарождения и развития усталостных повреждений

Разновидность типов несовершенств (пористость матрицы, участки, обогащенные или обедненные материалом связующего, непроклеи, свилеватость волокон, нарушение адгезионных связей, разрывы волокон, внутренние напряжения и т.д.), своеобразие их появления и эволюции, включая переход из одной формы в другую, слияние различных видов, – все это обуславливает сложность такого явления, как зарождение и развитие усталостных повреждений в КМ, превращая разработку и классификацию моделей усталости КМ в трудную задачу. Используемая во многих работах классификация моделей усталости предложена в работе Г.П. Сендецки [6] и подробно описана в работе [7]. В соответствии с [6] классификация критериев предела выносливости может иметь три основания:

- макроскопические (интегральные) свойства КМ;
- анализ остаточной прочности или остаточной жесткости;
- механические модели фактического зарождения и развития повреждений.

Модели на базе интегральных свойств КМ. Первый класс математических моделей усталостной долговечности – класс феноменологических моделей. Несмотря на принципиальное различие усталостного поведения КМ и традиционно используемых металлов, в течение многих лет модели для различных КМ разрабатывали, следуя общепринятым подходам безопасной долговечности, на базе экспериментального построения $S-N$ -кривых – опытных зависимостей амплитуды действующих напряжений S (или σ_a) от числа циклов нагружения N . При этом $S-N$ -кривые должны быть построены для разных коэффициентов асимметрии нагружения $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ (σ_{\min} , σ_{\max} – минимальное и максимальное значения напряжений в цикле), разной частоты нагружения, при разных амплитудах напряжений и различных эксплуатационных условиях (температура, влажность) применительно к условиям эксплуатации натурного изделия. Этот подход требует проведения экспериментальных работ, предполагающих большие временные и материальные затраты, и не учитывает механизмы зарождения и развития фактических повреждений, таких как трещины в матрице и разрывы волокна. Модели усталостной долговечности, которые не принимают во внимание механизмы фактической дегра-

дации, но используют $S-N$ -кривые и/или диаграммы типа отношения Гудмана [8], вводят своего рода критерии усталостного разрушения в форме отношения предельной $S-N$ -кривой к эксплуатационной $S-N$ -кривой, в том числе с применением законов линейного суммирования Пальмгрена – Майнера [9].

Крупным недостатком метода безопасной долговечности, даже с учетом некоторых его модификаций [10], является то обстоятельство, что $S-N$ -кривая – это характеристика конкретного материала, КМ с конкретной структурой армирования, полученного по конкретной технологии [11]. При любых изменениях в составе КМ (тип и форма наполнителя, матрица), технологии изготовления, структуре армирования должны быть экспериментально построены новые $S-N$ -кривые.

Одной из важных задач в этой постановке может служить задача аналитического предсказания самой $S-N$ -кривой для конкретного КМ. Во многих работах, например [12–14], применяются критерии прочности Хашина – Розена, Цая – Ву и другие, в которых вместо предела статической прочности используются соответствующие характеристики предела выносливости. В [15] предложена нормализованная $S-N$ -кривая, в работах [16; 17] – методы аналитического предсказания $S-N$ -кривой. В [16] соотношение для предсказания долговечности получено на основе статистического двухпараметрического распределения Вейбулла статической прочности КМ и предложенной модели изменения остаточной прочности. В следующем параграфе настоящей статьи аналитическая $S-N$ -кривая будет получена на основе предположений, что остаточная прочность является случайной функцией числа циклов нагружения, а статическая прочность КМ описывается трехпараметрическим распределением Вейбулла.

Модели снижения характеристик материала. Второй класс усталостных моделей – также феноменологических – включает математические модели остаточной жесткости и остаточной прочности. Эти модели предлагают исследование законов эволюции, описывающих постепенное ухудшение жесткости или прочности образца из КМ с точки зрения макроскопически наблюдаемых свойств, в отличие от третьего класса моделей развития повреждения, где изучаются законы зарождения и развития конкретного повреждения в конкретных условиях, в том числе в компонентах КМ.

Модели снижения жесткости. Оценка изменения специфических параметров КМ может осуществляться путем измерения изменений механических свойств. Например, для измерения изменения модуля упругости E может использоваться параметр поврежденности в виде $D = 1 - E^*/E$, где E^* – модуль упругости материала с повреждениями [18]. Аналогично может рассматриваться изменение и других характеристик КМ,

например микротвердости H . Для его измерения может быть взят параметр в виде $D = 1 - H^*/H$, где H^* – фактическая микротвердость материала в поврежденном состоянии.

Модели остаточной жесткости учитывают деградацию упругих свойств. Жесткость можно измерить частично во время испытаний на усталость [19]. Так, снижение частоты собственных колебаний рабочей лопатки вентилятора, обусловленное снижением модуля упругости, можно измерить в темпе усталостных испытаний без разрушения материала [5]. Модель может быть детерминированной, в которой характер изменения жесткости предсказывается однозначно, или статистической, в которой прогнозы выполнены на основе законов статистического распределения изменений жесткости.

Авторы работы [20] изменение характеристик жесткости ПКМ связывают с некоторой экспериментально определяемой поверхностью повреждения, подобной функции текучести в теории пластичности, и записывают ее в форме $F = F(\sigma_i, D) = 0$. Здесь $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$, $\sigma_4 = \sigma_{23}$, $\sigma_5 = \sigma_{13}$, $\sigma_6 = \sigma_{12}$, D – мера текущего повреждения.

Авторы работы [18] для построения континуальной модели повреждения ПКМ используют термодинамические подходы для необратимых процессов. Общий вектор деформации ε с компонентами $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_{23}$, $\varepsilon_5 = \varepsilon_{13}$, $\varepsilon_6 = \varepsilon_{12}$ представляется в виде суммы упругих, обусловленных повреждениями («пластических») и температурных составляющих. При этом упругие и температурные составляющие как порознь, так и в комбинации являются обратимыми. Первый закон термодинамики – закон сохранения энергии, в то время как второй закон выражает необратимое производство энтропии и связан с энергией диссипации из-за повреждений (необратимое снижение свободной энергии). Изменения матрицы жесткости $[\Delta C]$ авторы [18] предлагают оценить по экспериментальным кривым деформирования КМ.

В подходе остаточной жесткости предполагается, что усталостное разрушение происходит, когда модуль (отношение напряжения σ к деформации ε при произвольной деформации) деградирует до критического уровня, определенного в свое время многими исследователями. Хан и Ким [21] и О'Брайен и Рейфсидер [22] установили, что усталостное разрушение возникает, когда секущий модуль в усталостных испытаниях деградирует до значения секущего модуля в момент разрушения образца при статических испытаниях.

Модели снижения остаточной прочности. Во многих приложениях важно знать остаточную прочность конструкции из КМ и, как следствие, остаточную долговечность – количество циклов $N_r = N - n$ (где N – предельное число циклов, соответствующее

моменту разрушения; n – текущее число циклов), в течение которых конструкция может еще нести внешнюю нагрузку. Поэтому были разработаны так называемые модели остаточной прочности, описывающие снижение первоначальной прочности в течение усталостного нагружения. С самого начала такие модели носили, как правило, статистический характер. Чаще всего для описания остаточной прочности и вероятности разрушения использовались двухпараметрические распределения Вейбулла. В работе [23] с использованием экспериментально полученной нормализованной $S-N$ -кривой определена остаточная прочность и по критерию допустимой остаточной прочности спроектировано изделие.

В моделях остаточной прочности выделяют два подкласса моделей: модели внезапной смерти и модели износа (медленной деградации прочности). Когда образцы или детали из ПКМ подвергаются напряжениям высокой амплитуды σ_a (диапазон малоциклового усталости), остаточная прочность σ_r сначала почти постоянна и не зависит от числа циклов n . Когда оно достигает критического значения N , соответствующего моменту разрушения, σ_r резко уменьшается. Модель внезапной смерти [24; 25] подходит для описания этого поведения, она эффективна не только в применении к керамическим материалам, но и высокопрочным однонаправленно-армированным КМ.

Однако при низких амплитудах напряжений σ_a остаточная прочность σ_r КМ в зависимости от числа циклов n деградирует медленнее, в течение большого периода времени. Такое поведение КМ описывается моделями деградации, которые часто называют моделями износа [26]. Как правило, эти модели включают предположение о равенстве категорий статической прочности и долговечности, которое устанавливает, что наиболее прочный образец имеет или наибольшую усталостную долговечность N , или наибольшую остаточную прочность σ_r на выходе. Это предположение было подтверждено экспериментально Ханом и Кимом [27]. Следует отметить, что оно не может быть использовано, если конкурирующие формы разрушения наблюдаются одновременно в ходе испытаний на усталость [28].

Разработанные модели остаточной прочности, как правило, неприменимы одновременно к обоим диапазонам изменения амплитуды напряжений σ_a (к мало- и многоциклового усталости), и область применимости моделей в большинстве работ не всегда определяется. Подавляющая часть исследований и соответствующие результаты испытаний относятся к одному из диапазонов циклических нагрузок: к мало- или многоциклового усталости.

В модели износа, первоначально представленной Халпином и др. [29], предполагается, что остаточная прочность является монотонно уменьшающейся функ-

цией числа циклов $\sigma_r(n)$ и что изменение остаточной прочности может быть аппроксимировано степенным законом:

$$\frac{d\sigma_r(n)}{dn} = -\frac{A(\sigma_a)}{m} (\sigma_r(n))^{m-1}, \quad (1)$$

Здесь $A(\sigma_a)$ – функция амплитуды напряжения; m – экспериментально определяемая константа. Процедура определения остаточной прочности (1) была потом рассмотрена многими исследователями [21; 24; 25; 27; 30], в частности степенной закон изменения остаточной прочности (1) использован в работе [16].

Экспериментальное определение кривой остаточной прочности $\sigma_r(n)$, которая может быть неоднозначной функцией числа циклов, является сложной задачей из-за значительного разброса экспериментальных данных. В работе [31] для ПКМ экспериментально найдены значения остаточной прочности $\sigma_r(n)$ для отдельных значений числа циклов нагружения n при различных амплитудах циклического напряжения σ_a .

Даниэль и Чаревич в работе [32] предполагают, что усталостное повреждение является функцией только остаточной прочности σ_r . Поэтому для того чтобы образец, циклически нагруженный при амплитуде напряжения σ_{a1} в течение n_1 циклов, имел то же повреждение, какое получил другой образец, циклически нагруженный при амплитуде напряжения σ_{a2} в течение n_2 циклов, необходимо, чтобы оба образца имели одну и ту же остаточную прочность σ_r после соответствующих циклов нагружения n_1 и n_2 . Это определение позволяет построить кривые равной поврежденности в плоскости (σ_r, n) . Предсказание остаточной долговечности N_r , таким образом, можно сделать после определения кривых равной поврежденности.

Обширные экспериментальные и теоретические исследования были выполнены Шаффом и Дэвидсоном [33; 34]. Они представили модель на основе деградации прочности для прогнозирования остаточной прочности и долговечности конструкций из ПКМ, подверженных спектральному усталостному нагружению. Предложена следующая модель остаточной прочности:

$$\sigma_r(n) = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_a)(n/N)^v, \quad (2)$$

где $\sigma_r(n)$ – остаточная прочность; σ_0 – прочность при статическом нагружении; σ_a – амплитуда напряжения при циклическом нагружении; v – экспериментально определяемый параметр. Линейная деградация прочности соответствует случаю, когда $v = 1$. Свойства ПКМ с внезапным разрушением хорошо описываются при $v \gg 1$. Модели износа и постепенного (медленного) роста повреждений прогнозируются моделью (2) в случае, когда $v < 1$. Предложенная модель [33; 34] была впервые применена к усталостному нагружению с амплитудой

литудой напряжений двух уровней. Был рассмотрен вклад результатов испытаний при (σ_{a1}, n_1) в состояние (σ_{a2}, n_2) , установлена зависимость снижения прочности при амплитуде напряжений σ_{a2} от числа циклов нагружения n_1 , при котором не было разрушений при амплитуде напряжений σ_{a1} . Авторы модели определили эффективное число циклов нагружения n_{eff} как такое число циклов с амплитудой напряжения σ_{a2} (σ_{a2}, n_{eff}), при котором остаточная прочность $\sigma_r(n_{eff})$ будет такой же, как при нагружении с амплитудой напряжений σ_{a1} и числом циклов нагружения n_1 (σ_{a1}, n_1). Это помогло построить поверхности с равной остаточной прочностью, охватывающие поверхности равной поврежденности. Шафф и Дэвидсон также исследовали важность «эффекта смеси циклов»: слоистые тела, испытанные сначала в блоках с малым числом циклов и высокими амплитудами напряжений, а затем в блоках с большим числом циклов при низких амплитудах напряжений, имели заметно меньшую среднюю усталостную долговечность по сравнению со слоистыми телами, которые подвергались испытаниям в блоках с большим числом циклов нагружения и низкими амплитудами напряжений с последующими испытаниями в блоках с малым числом циклов и высокими амплитудами напряжений. Этот результат имел место несмотря на то, что общее число циклов при таких амплитудах напряжений было одинаковым для обоих слоистых тел в конце эксперимента.

Эти результаты имеют особое значение при моделировании полетного цикла для рабочих лопаток вентиляторов из ПКМ. Известно, что правило линейного суммирования Пальмгрена – Майнера непригодно для предсказания усталостной долговечности рабочих лопаток вентиляторов из ПКМ. Поэтому для того чтобы учесть эффект смеси циклов нагружения в полетном цикле, целесообразно сформировать единый блок нагрузок, соответствующий начальному нагружению, взлетному режиму, этапу крейсерского полета, режиму руления и останова двигателя.

В следующем параграфе статьи изменения остаточной прочности $\sigma_r(n)$ с циклом нагружений n при постоянной амплитуде напряжения σ_a рассматриваются как стохастический процесс, описанный по закону (2). Вероятностный анализ такого процесса позволяет построить аналитическое выражение для $S-N$ -кривой изделий из ПКМ для оценки долговечности N изделий при заданной амплитуде напряжений σ_a или допустимых амплитуд напряжений σ_a при заданном числе циклов N до разрушения.

Модели остаточной прочности имеют присущие естественному разрушению критерии: разрушение происходит, когда амплитуда σ_a переменного напряжения равна остаточной прочности $\sigma_r(N)$ [5; 33–35].

Модели развития повреждений. В последние десятилетия интенсивно изучаются механизмы зарождения и развития повреждений в КМ, формирующие законы их усталостного роста. Особенности зарождения повреждений в металлах изучены и воспроизведены в моделях механики разрушений [3], развитие повреждений, как правило, приводит к развитию одной магистральной трещины, что описано, например, степенным законом Пэриса [36].

Во многих работах, посвященных КМ, например [7; 37], вначале выбирается форма повреждения. Такой формой повреждений могут служить трещины (поры) в материале матрицы, в слоях, ортогональных действию нагрузки, или разрывы на границе раздела слоев, отличающихся схемой армирования. Затем исследуется эволюционное развитие выбранной формы повреждения в зависимости от внешних условий (статического, циклического или других видов нагружения). Как правило, законы развития таких повреждений пытаются описать законами, подобными закону Пэриса или несколько модифицированными, с экспериментальным определением параметров модели.

В русле этих направлений лежит механика развития повреждений в сплошных средах, основанная на идеях Л.М. Качанова [38–40], которая обеспечивает практический инструмент для моделирования влияния развития повреждений на долговечность. В классическом подходе переменная повреждения соответствует накоплению повреждения: от неповрежденного состояния (параметр $\omega = 0$) до разрушения (параметр $\omega = 1$). Следуя идеям Л.М. Качанова [38], закон роста повреждения принимают в форме дифференциального уравнения относительно $\omega(t)$:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = C \left[\frac{\sigma(t)}{1 - \omega(t)} \right]^v, \quad (3)$$

где C и v – экспериментально определяемые постоянные материала.

Модель легко может быть использована для оценки долговечности рабочих лопаток вентиляторов из ПКМ в случае реального полетного цикла авиационного двигателя. В течение времени t , соответствующего одному полетному циклу, имеет место k взаимно исключаяющих и дополняющих друг друга отдельных режимов i ($i = 1, 2, \dots, m$), каждый из которых характеризуется приблизительно постоянной амплитудой напряжений σ_{ai} и постоянной продолжительностью $t_i = (k_i - k_{i-1})t$. Принято, что $k_0 t = 0$. Очевидно, что $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = 1$. Такими режимами могут быть, например, режим холостого хода, взлетный режим, режим крейсерского полета и руления в ТРДД.

В описанных условиях интегрирование уравнения (3) приводит к зависимости

$$\omega(t) = 1 - \left[1 - C(v+1)t \sum_{i=1}^m \sigma_{ai}^v (k_i - k_{i-1}) \right]^{1/(v+1)}. \quad (4)$$

Соотношение (4) позволяет оценить степень повреждения на одном цикле нагружения. Суммируя повреждения на каждом режиме полетного цикла и используя критерий разрушения $\omega = 1$, можно оценить долговечность изделия.

Механика развития повреждений в сплошных средах обеспечивает практический инструмент, позволяющий моделировать влияние развития повреждений на долговечность. В [40] предложена модификация условий классического разрушения для предсказания разрушения при постоянной нагрузке и доказано, что предложенный метод прогнозирования накопления повреждений не уступает закону линейного суммирования повреждений (закон Пальмгрена – Майнера).

Модели развития выбранных форм повреждений преимущественно рассматривают зарождение и развитие только одного типа несовершенства и не охватывают возможности изменения форм повреждений или совместного их развития, что характерно для КМ.

В работе [41] рассматривается трехточечный изгиб балки из керамического КМ с выточкой в области наибольших растягивающих напряжений. На рис. 2 приведены результаты исследований, основанные на оценке освобождения энергии деформации G при зарождении

и развитии трещины. При нагрузке $P = 75$ Н на острие выточки зарождается и с него срагивается трещина. С ростом нагрузки она развивается и при $P = 90$ Н приводит к исчерпанию несущей способности балки из монолитного керамического материала. Критическая нагрузка $P = 90$ Н согласуется с оценками, выполненными на основе соотношения Ю.Н. Работнова [42]:

$$dG/dl = 0, \quad (5)$$

где G – освободившаяся энергия при развитии трещины; l – длина трещины.

Если этот материал используется в качестве матрицы в армированном КМ, то при $P = 90$ Н трещина достигает волокна и упирается в него – процесс роста трещины останавливается. Нужна дополнительная энергия для ее развития. При повышении нагрузки с $P = 90$ Н до $P = 135$ Н изменяется форма разрушения – развивается область разрушения в предволоконной части балки (когезионное разрушение материала матрицы). При $P = 135$ Н происходят разрушения на границе раздела волокно – матрица (адгезионное разрушение). Характер и последовательность развития повреждений могут быть оценены с применением критериев разрушения, предложенных, например, в [43]. При дальнейшем увеличении нагрузки разрушения адгезионных связей на границе раздела волокно – матрица приводят к разрушениям материала матрицы на противоположной стороне

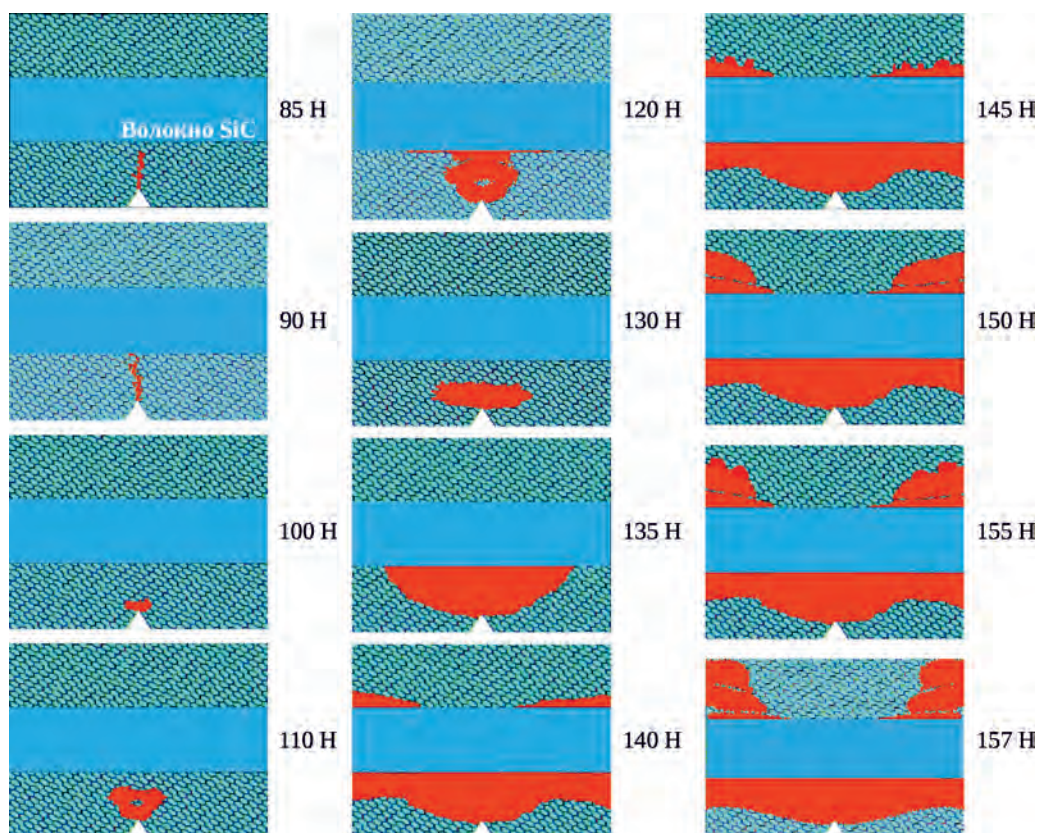
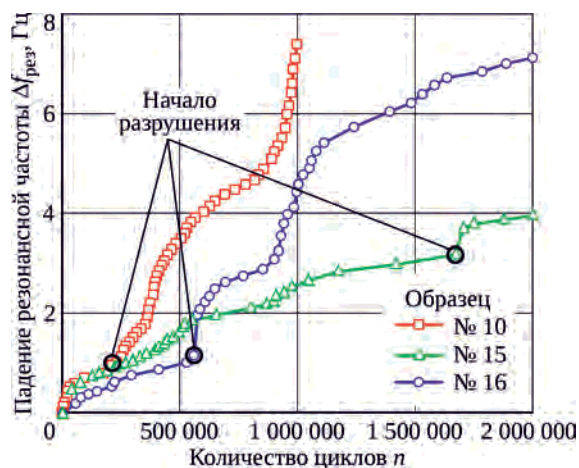


Рис. 2. Кинетика развития трещины при трехточечном изгибе балки с выточкой



| № образца | Деформация, % | Количество циклов |
|-----------|---------------|-------------------|
| 10 | 0,376 | 559 000 |
| 15 | 0,399 | 362 000 |
| 16 | 0,397 | 1 670 000 |

Рис. 3. Падение резонансной частоты при циклическом нагружении с различными амплитудами деформаций

волокна, к повреждениям в следующем слое материала и формированию в разрушенных слоях связей между волокном и матрицей в виде мостика. Таким образом, описанный типичный процесс разрушения армированных материалов существенно отличается от процесса развития повреждений в однородных, неармированных материалах и демонстрирует повышение макроскопических характеристик вязкости разрушения КМ.

Смена форм повреждений и их совместное развитие представляют трудно преодолимое препятствие для моделирования, поэтому проблема предсказания долговечности КМ в условиях различных нагрузок полностью не решена. Сложность возрастает, если принять во внимание циклические нагрузки и циклически меняющиеся окружающие условия.

В моделях развития повреждений пытаются поставить в прямую зависимость ухудшение характеристик КМ (жесткости, прочности) от состояния конкретных повреждений, например поперечных трещин в матрице, размеров расслоений, разрывов «слабых» волокон. В [26] экспериментально установлена зависимость падения частоты собственных колебаний по первой изгибной форме консольно-закрепленной пластины из углепластика при отдельных амплитудах колебаний (рис. 3). Эта зависимость не является монотонно возрастающей функцией, а изобилует различно наклоненными участками. Изменение касательных к кривой «падение собственной частоты – число циклов нагружения» связано с изменением формы поврежденности образца. Продолжительность участка и частота изменений зависят от уровня нагруженности образца.

Таким образом, третий класс моделей усталостной долговечности изучает зарождение и развитие отдель-

ных видов повреждений в КМ и ставит в соответствие одной или большему числу выбранных переменных повреждения определенную степень ухудшения упругих и прочностных характеристик композиционных материалов. Критические значения последних (остаточной прочности, жесткости) принимаются за исчерпание несущей способности конструкции. Эти модели часто называют механистическими.

Заключение. Сложность и трудность моделирования усталости КМ обусловлены двумя техническими моментами. Первый из них – присутствие в явлении усталости нескольких масштабов (микро, мезо и макро), что затрудняет моделирование зарождения и развития повреждений при переменных циклических нагружениях. Феноменологические модели на уровне макромасштаба недостаточно полно охватывают явление усталости и построены только на таких экспериментальных данных, как *S-N*-кривые. Модели на уровне мезо- и микромасштаба еще недостаточно развиты для описания такого сложного явления. Выявления одного типа повреждения и исследования его развития недостаточно для оценки усталостной долговечности КМ. Второй момент – множество неопределенностей, сопровождающих процесс создания КМ и изделий из них, что определяет практическую невозможность производства и изучения одного вещества на одинаковых образцах, с адекватно повторяющимися микроструктурными особенностями. На эти моменты обратил внимание Фонг [44].

Математическая модель безопасной долговечности

Из анализа экспериментальных данных [45] следует, что остаточная прочность σ_r детали при заданной амплитуде циклического напряжения σ_a медленно изменяется с числом циклов нагружения n и при приближении n к моменту потери несущей способности, которая происходит при числе циклов нагружения N , она начинает быстро убывать.

Остаточная прочность σ_r детали не является детерминированной величиной. Это случайная функция, зависящая от числа циклов нагружения n при постоянной амплитуде циклического напряжения σ_a (рис. 4). Здесь популяция остаточной прочности Ξ_r представляется как стохастический процесс [46], зависящий от числа циклов нагружения n . Каждая ее реализация может быть представлена в виде линейной функции предела статической прочности σ_b , амплитуды σ_a циклического напряжения и степенной функции отношения текущего числа циклов n к предшествующему $(N - 1)$ предельному N числу циклов нагружения:

$$\sigma_r = \sigma_b + (\sigma_a - \sigma_b) y^a; \quad y = n / (N - 1). \quad (6)$$

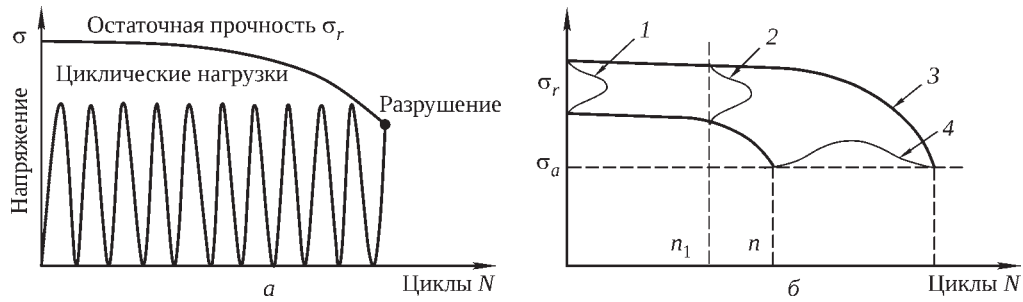


Рис. 4. Остаточная прочность как случайный процесс (а) и одна из ее возможных реализаций (б):
1 – распределение статической прочности; 2 – распределение остаточной прочности;
3 – деградация прочности; 4 – распределение предела выносливости

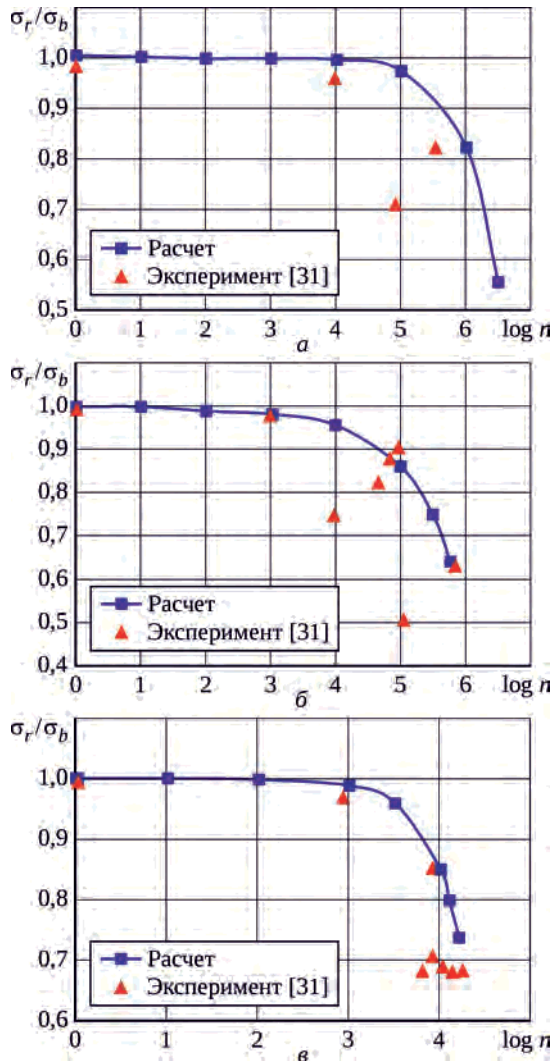


Рис. 5. Зависимость остаточной прочности σ_r углепластика с укладкой $[0_2/90_2]_{25}$ от числа циклов нагружения n при разной амплитуде напряжения и $R = 0$ (предел статической прочности $\sigma_b = 754$ МПа):
а – $\sigma_a = 0,5\sigma_b$, $\alpha = 0,805$; б – $\sigma_a = 0,6\sigma_b$, $\alpha = 0,519$;
в – $\sigma_a = 0,7\sigma_b$, $\alpha = 1,231$

Соотношение (6) используется во многих исследованиях (см. соотношение (2)). Показатель степени α , называемый параметром деградации, является в каждом сечении n случайной величиной. Параметр α позво-

ляет построить модели износа и модели быстрой смерти [34; 35; 47]. В [48] подчеркнуто, что остаточная прочность σ_r является одним из трех основных направлений анализа долговечности деталей из КМ в авиации. Сравнением с экспериментальными данными, приведенными в [31], и результатами собственных исследований (рис. 5) подтверждена возможность описания случайной реализации остаточной прочности формулой (6).

Распределение предела статической прочности σ_b . Предполагается, что характер зарождения трещины и ее развития при статическом и циклическом нагружении одинаков. Это требует определенности в законе распределения предела статической прочности (при $n = 0$). Вероятность предела статической прочности σ_b здесь описывается трехпараметрическим распределением Вейбулла:

$$\begin{cases} P(\Xi_b < \sigma_b) = 0, & \text{если } \sigma_b < \sigma_{b0}; \\ P(\Xi_b < \sigma_b) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\sigma_b - \sigma_{b0}}{\delta}\right)^\gamma\right\}, & \text{если } \sigma_{b0} < \sigma_b. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь γ – параметр формы; δ – параметр масштаба; σ_{b0} – пороговое значение предела статической прочности σ_b . Способы определения параметров распределения Вейбулла испытаниями на прочность известны [49] и здесь не описываются.

Распределение остаточной прочности σ_r . Предположение об идентичности характера зарождения трещины и ее развития при статическом и циклическом нагружении позволяет использовать закон распределения (7) при $n = 0$ для анализа законов распределения вероятностей остаточной прочности при любом n . Линейная зависимость (6) остаточной прочности σ_r от предела статической прочности σ_b показывает, что вероятность остаточной прочности σ_r также подчиняется трехпараметрическому распределению Вейбулла:

$$g(\sigma_r) = \left(\frac{\gamma}{\delta_r}\right) \left(\frac{\sigma_r - \sigma_{r0}}{\delta_r}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{-\left(\frac{\sigma_r - \sigma_{r0}}{\delta_r}\right)^\gamma\right\}, \quad (8)$$

со значением параметра формы γ , совпадающим с параметром формы статической прочности, и новыми параметром масштаба δ_r и пороговым значением σ_{r0} :

$$\delta_r = \delta(1 - y^\alpha); \quad \sigma_{r0} = \sigma_a y^\alpha + (1 - y^\alpha) \sigma_{b0}. \quad (9)$$

При этом математическое ожидание M_r , дисперсия D_r , среднеквадратичное отклонение s_r и коэффициент вариации v_r остаточной прочности σ_r функционально зависят от числа циклов нагружения y и числовых характеристик статической прочности:

$$\begin{aligned} M_r &= \sigma_a y^\alpha + (1 - y^\alpha) M_b; \\ D_r &= (1 - y^\alpha)^2 D_b; \quad s_r = (1 - y^\alpha) s_b; \\ v_r &= \frac{s_r}{M_r} 100\% = \frac{100\% (1 - y^\alpha) s_b}{[\sigma_a y^\alpha + (1 - y^\alpha) M_b]}. \end{aligned}$$

Здесь M_b , D_b , s_b – математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение предела статической прочности. Следует отметить, что, когда число циклов нагружения $n = 0$ (или при $y \rightarrow 0$), закон распределения $g(\sigma_r)$ остаточной прочности σ_r и числовые характеристики совпадают с законом распределения (7) предела статической прочности σ_b и его характеристиками. С приближением числа циклов испытаний n к предельному N (или $y \rightarrow 1$) математическое ожидание M_r остаточной прочности приближается к амплитуде σ_a циклического напряжения ($M_r \rightarrow \sigma_a$). При этом рассеяние D_r популяции Ξ_r остаточной прочности около математического ожидания M_r уменьшается ($D_r \rightarrow 0$). Результат $D_r \rightarrow 0$ физически не воспринимается, экспериментальные данные, подтверждающие или опровергающие это положение, неизвестны.

Таким образом, на любом этапе n циклического нагружения с постоянной амплитудой σ_a вероятность остаточной прочности σ_r подчиняется трехпараметрическому распределению Вейбулла (8) с пороговым значением σ_{r0} , параметром масштаба δ_r , зависящими от числа циклов нагружения n , и с соответствующим данным статических испытаний параметром формы γ (7). При этом интегральная функция распределения остаточной прочности σ_r определяется из выражения

$$P(\Xi_r < \sigma_r) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma_r - \sigma_{r0}}{\delta_r} \right)^\gamma \right\} \text{ для } \sigma_r \geq \sigma_{r0}. \quad (10)$$

Распределение нормализованной прочности. Рассматривается нормализованная популяция $X = \Xi_r / \sigma_a$, отнесенная к детерминированной величине σ_a – амплитуде циклического напряжения. Случайная величина X линейно зависит от популяции остаточной прочности Ξ_r , и поэтому ее вероятность также подчиняется трехпараметрическому распределению Вейбулла:

$$h(x) = \frac{\gamma}{\delta_x} \left(\frac{x - x_0}{\delta_x} \right)^{\gamma-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x - x_0}{\delta_x} \right)^\gamma \right\};$$

$$P(\Xi_x < x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x - x_0}{\delta_x} \right)^\gamma \right\} \text{ для } x \geq x_0 \quad (11)$$

с неизменным параметром формы γ , подправленным параметром масштаба δ_x и пороговым параметром x_0 :

$$x_0 = y^\alpha + (1 - y^\alpha) \frac{\sigma_{b0}}{\sigma_a}; \quad \delta_x = (1 - y^\alpha) \frac{\delta}{\sigma_a}. \quad (12)$$

Математическое ожидание M_x , дисперсия D_x , среднеквадратичное отклонение s_x и коэффициент вариации v_x нормализованной случайной функции X определяются из равенств

$$\begin{aligned} M_x &= m_x = y^\alpha + (1 - y^\alpha) \frac{M_b}{\sigma_a}; \\ D_x &= (1 - y^\alpha)^2 \frac{D_b}{\sigma_a^2}; \quad s_x = (1 - y^\alpha) \frac{s_b}{\sigma_a}; \\ v_x &= 100\% s_x / \left(y^\alpha + (1 - y^\alpha) \frac{M_b}{\sigma_a} \right). \end{aligned}$$

Вероятность разрушения. Когда остаточная прочность σ_r достигает значения амплитуды циклического напряжения σ_a , происходит исчерпание несущей способности детали [15]. Это условие имеет место во всех случаях, когда нормализованная остаточная прочность X окажется меньше единицы. В соответствии с (11) и (12) вероятность разрушения p определяется из соотношения

$$\begin{aligned} p &= P(\Xi_x \leq 1) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{1 - x_0}{\delta_x} \right)^\gamma \right\} = \\ &= 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma_a - \sigma_{b0}}{\delta} \right)^\gamma \right\} \text{ для } \sigma_a \geq \sigma_{b0}. \quad (13) \end{aligned}$$

Получен парадоксальный, но важный результат. Вероятность разрушения p при циклическом нагружении не зависит от числа циклов нагружения n и отличающегося большей неопределенностью параметра деградации α в основном соотношении (6). Вероятность разрушения p при циклическом нагружении зависит только от параметров распределения статической прочности (σ_{b0} , δ и γ) исследуемого материала. Более того, если амплитуда циклического напряжения σ_a окажется меньше порогового значения σ_{b0} , то вероятность разрушения равна нулю. Здесь уместно использовать результаты работ (например, [21; 27]), в которых показано, что предельные деформации при циклическом и статическом нагружении совпадают. Это обстоятельство позволяет принять, что значение статического порогового параметра σ_{b0} может быть использовано как предел выносливости материала.

В соответствии с соотношением (13) вероятности всех значений амплитуды циклического напряжения σ_a ,

превышающих остаточную прочность σ_r ($X \leq 1$), подчиняются трехпараметрическому распределению Вейбулла с параметрами формы γ , масштаба δ и пороговым значением σ_{b0} предела статической прочности.

Наиболее вероятное значение числа циклов до разрушения. Вероятность разрушения, представленная равенством (13), охватывает совокупность значений популяции $X < 1$. Эта совокупность охватывает любое число циклов нагружения N из промежутка $(1; N)$. Каждое из этих событий (конкретное значение N) появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $1 - p$. Например, вероятность P_i того, что это событие (исчерпание несущей способности) будет иметь место на i -м шаге из промежутка $(1; N)$, вычисляется из неравенства $P_i \leq (1 - p)^{i-1} p$. Закон распределения вероятностей P_i является биномиальным, и вероятность того, что на промежутке $(1; N)$ будет иметь место одно единственное исчерпание несущей способности, определяется из равенства [46]

$$P_N(1) = C_N^1 (1 - p)^{N-1} p = N(1 - p)^{N-1} p. \quad (14)$$

Анализ показывает, что вероятность $P_N(1)$ сначала возрастает в зависимости от N , достигает максимума и затем убывает до нуля. Аналитическое определение максимума вероятности разрушения $P_N(1)$ приводит к соотношению

$$N_{\max} = -1 / \ln(1 - p), \quad (15)$$

показывающему наиболее вероятное значение числа циклов N , при котором ожидается исчерпание несущей способности при заданной амплитуде циклического напряжения σ_a с вероятностью p .

Если равенство (13) подставить в полученное соотношение (15), то после небольших преобразований можно получить зависимость

$$\sigma_a = \sigma_{b0} + \delta(N_{\max})^{-1/\gamma}. \quad (16)$$

Соотношение (16) связывает амплитуду циклического напряжения σ_a с числом циклов нагружения, при котором вероятность разрушения $P_N(1)$ максимальна, и оно может быть принято в качестве аналитически прогнозируемой S - N -кривой усталости. Кривая усталости $\sigma_a = \sigma_a(N_{\max})$ определяется параметрами формы γ , масштаба δ и значением порогового параметра σ_{b0} в законе распределения (7) предела статической прочности σ_b .

Специально проведенные исследования показали, что повышение значений параметров формы γ (повышение качества изделия), масштаба δ (повышение моды прочности, т.е. значения случайной величины, которому соответствует максимальная вероятность) и порогового параметра σ_{b0} (повышение минимальной прочности) приводит к снижению вероятности разрушения p (13)

и, следовательно, повышению долговечности изделия. Особо сильное влияние на вероятность разрушения p оказывает модуль Вейбулла γ .

Результаты работы [16], полученные на основе соотношения (1) и двухпараметрического распределения Вейбулла для статической прочности, следуют из равенства (16), если в нем пороговое значение прочности положить равным нулю ($\sigma_{b0} = 0$), т.е. предел выносливости будет равен нулю.

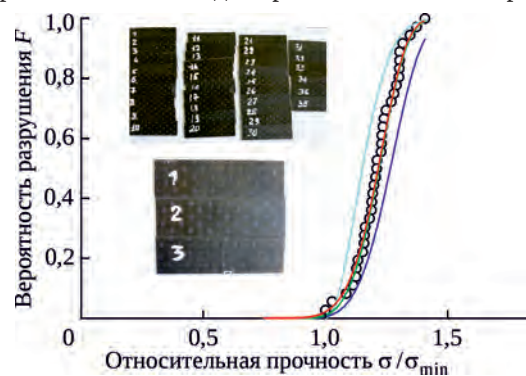
Практическая ценность прогнозов с использованием соотношения (16) заключается в качественно новом подходе, необходимом для построения усталостных S - N -кривых и основанном на результатах только статических испытаний. Подход обеспечивает существенное сокращение как временных, так и материальных затрат для оценки долговечности материалов и изделий из них.

Результаты испытаний и сравнительный анализ

Сравнение прогнозируемой соотношением (16) долговечности с экспериментальными данными выполнено с привлечением результатов собственных испытаний и данных из доступной литературы.

Статические испытания образцов. Д.С. Пальчиковым проведены испытания на трехточечный изгиб 36 образцов, вырезанных из одной пластины (рис. 6), изготовленной в ЦИАМ из углепластика Т800/Т266 на основе углеродной ткани УТ-900(И)-240бр и эпоксидного связующего Т26 с укладкой $[0/\pm 60]_s$. Испытания проведены в соответствии с ASTM D7264 на испытательной машине Instron 5985. Деформации измерялись экстензометром Epsilon 3540-012M-ST, скорость нагружения 1 мм/мин.

Результаты испытаний на прочность представлены на рис. 6 точками в виде нормализованной эмпирической



| | | | | |
|---------------|---------|---------|---------|---------|
| γ | 5,720 | 1,968 | 4,411 | 4,327 |
| σ_{b0} | 497,335 | 178,790 | 379,418 | 418,931 |
| δ | 732,207 | 986,127 | 852,123 | 862,159 |

Рис. 6. Результаты статических испытаний образцов, характер их разрушения и вероятностная обработка

кой функции распределения (напряжения σ отнесены к минимальному полученному результату σ_{\min}). Там же приведены значения модуля Вейбулла γ , порогового значения σ_{b0} и параметра масштаба δ , вычисленные методом максимального правдоподобия (первая колонка), методом моментов (вторая колонка), методом квантилей (третья колонка) и эмпирическим методом (четвертая колонка). Наилучшее соответствие с экспериментальными данными имеет расчетная кривая распределения Вейбулла с параметрами, полученными методом моментов. Эти результаты использованы при построении $S-N$ -кривых по формуле (16).

Усталостные испытания образцов. Два консольно-закрепленных образца, вырезанных из другой пластины, изготовленной по той же технологии, из тех же исходных материалов и в то же время, что и для статических испытаний, были испытаны Д.В. Матюхиным на усталость при коэффициенте асимметрии цикла нагружения $R = -1$ (рис. 7).

Для такого явления, как усталость, отличающегося большим разбросом экспериментальных наблюдений, предсказанные $S-N$ -кривые удовлетворительно согласуются с результатами испытаний.

Сравнение с опубликованными данными. Использование приведенных в доступной литературе сведений об экспериментальных результатах, полученных статическими испытаниями, для построения $S-N$ -кривых сопряжено с трудностями. В публикациях отсутствуют данные о пороговом значении σ_{b0} предела статической прочности. В лучшем случае приводятся среднее значение σ_{bav} и коэффициент вариации v_b предела статической прочности исследованных на усталость образцов. На это обращено внимание в [16], где предложен способ определения параметров двухпараметрического распределения Вейбулла из опубликованных данных о статических характеристиках прочности материала. Предложенный способ требует решения нелинейных уравнений. Автор настоящей статьи использовал разработанный в ЦИАМ способ определения параметров трехпараметрического распределения Вейбулла на основе сведений о среднем значении σ_{bav} , коэффициенте вариации v_b и связи параметра масштаба δ с пороговым значением σ_{b0} при уровне вероятности 63%.

В зависимости от представленных в литературе сведений построение $S-N$ -кривых на основе соотношения (16) может быть выполнено с использованием данных:

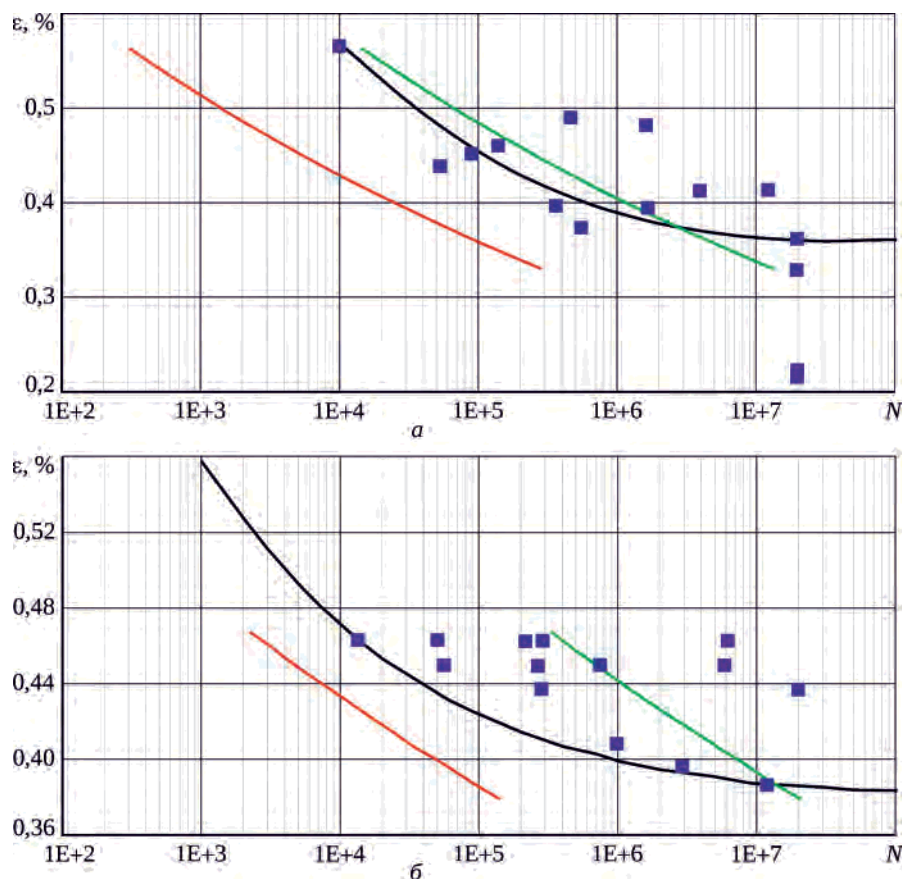


Рис. 7. Результаты испытаний двух образцов (а, б) на усталость и прогнозируемые кривые:
■ – эксперимент; — – $P = 0,01$; — – $P = 0,5$;
— – кривые, полученные с использованием формулы (16) на основе результатов статических испытаний

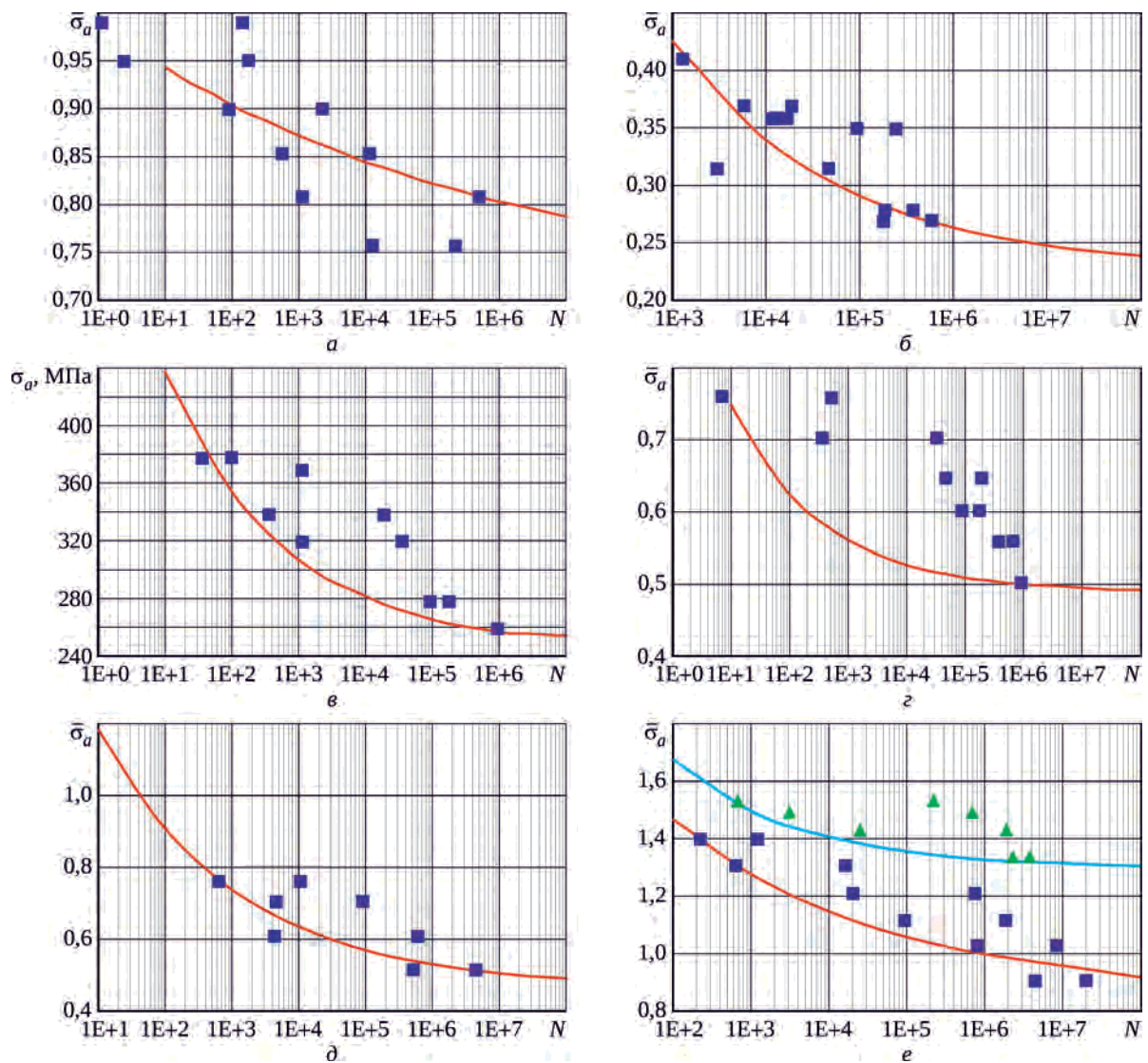


Рис. 8. Сравнение предсказанных соотношением (16) пределов выносливости материалов с экспериментальными данными: а – растяжение, $R=0$ [50]; б – растяжение – кручение, $R=0$ [51]; в – растяжение – сжатие, $R=-1,6$ [52]; г – изгиб, $R=-1$ [45]; д – сжатие, $R=10$ [45]; е – растяжение, $R=0,1$ (■), $R=0,5$ (▲) [53]

– для предела статической прочности σ_b и предположения, что $\sigma_{b0} = 0$;

– для предела статической прочности σ_b и одной кривой усталости, полученной при малых σ_a и больших N , например $N > 10^{10}$;

– для предела статической прочности σ_b и пороговых значений σ_{b0} , определенных для различного числа циклов нагружения N и амплитуды циклического напряжения σ_a .

На рис. 8 приведено сравнение результатов испытаний (точки) и вычисленных с помощью соотношения (16) зависимостей числа циклов N от амплитуды приложенной нагрузки σ_a (кривые) для разных материалов: однонаправленно-армированного углепластика AS4/3501-6 (а), стеклопластика на основе саржевой ткани (б), углепластика T300/94 со схемой армирования $[0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/90]_s$ (в), углепластика T800/5245 со

схемой армирования $[\pm 45/0]_{2s}$ (г, д) и углепластика Celion 6000/H795E BMI на полиимидном связующем со схемой армирования $[0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/90]_s$ (е). Результаты испытаний болтового соединения приведены на рис. 8,в (МПа), в остальных случаях испытывались образцы (амплитуды напряжений нормированы относительно предела статической прочности). В использованных публикациях отсутствуют сведения о статической прочности исследованных КМ. Поэтому для оценки параметров распределения Вейбулла использовались данные усталостных испытаний. Пороговый параметр σ_{b0} определен как минимальное значение предела выносливости при максимальном числе циклов нагружения. Параметр масштаба δ и модуль Вейбулла γ определены из двух значений, взятых из экспериментальных данных.

Соответствие предсказанных результатов рассмотренным экспериментальным данным можно считать

удовлетворительным, за исключением случая на рис. 8,2, где результаты расчета слишком занижены.

Заключение. Соответствие предсказаний (16) экспериментальным данным простирается от удовлетворительного до неудовлетворительного и существенно зависит от качества установленных параметров трехпараметрического распределения Вейбулла. При анализе соответствия предсказаний (16) экспериментальным данным следует считаться с тем, что предсказанная долговечность основана на единственной постоянной величине p (13), характеризующей вероятность разрушения. В усталостных же испытаниях повреждения развиваются, изменяются формы разрушения, что непременно приводит к изменению вероятности разрушения p и не охватывается формулами (13) и (16). Кинетика вероятности разрушения p является предметом специальных исследований. В то же время нельзя забывать, что разброс усталостных опытных данных исчисляется порядком. Все это в совокупности обеспечивает правдоподобность предсказаний.

Проведенное обоснование (сравнение с результатами испытаний), выполненное даже в условиях неопределенностей, касающихся порогового значения σ_{b0} , позволяет рекомендовать к использованию соотношение (16) для оценки долговечности КМ, что особенно важно на стадиях предварительного проектирования, отличающихся недостаточностью экспериментальных данных.

Коэффициент асимметрии цикла нагружения R

$S-N$ -кривая (16), соответствующая вероятности разрушения p (13), получена в предположении, что коэффициент асимметрии $R = 0$. Кривая усталости (16) может также использоваться в случае, когда амплитуда циклического напряжения σ_a является отрицательной (сжатие), а его параметры определены кратковременными статическими испытаниями образцов на сжатие. В этом случае коэффициент асимметрии $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = \sigma_a / 0 = \infty$. Таким образом, рассмотрены случаи, когда в каждом цикле нагружения:

- напряжение σ растет от нуля до максимального значения и затем убывает до нуля ($R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 0$);
- напряжение σ убывает от нуля до минимального значения и затем возрастает до нуля ($R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = \infty$).

Так как в рамках трехпараметрического закона распределения статической прочности считается, что при $|\sigma| \leq |\sigma_{b0}|$, где σ_{b0} – пороговое значение предела статической прочности, не происходит какого-либо повреждения, то коэффициент асимметрии может быть определен как $R = (\sigma_{\min} - \sigma_{b0}^*) / (\sigma_{\max} - \sigma_{b0})$.

На практике коэффициент асимметрии R изменяется в широких пределах и отличается от рассмотрен-

ных значений. Например, рабочие лопатки турбомашин на крейсерском режиме испытывают в основном статические нагрузки (центробежные силы, давление, температура) и дополнительно – переменные нагрузки. Последние могут иметь широкий спектральный состав, различные амплитуды колебаний, во многих случаях не установленные. Это обстоятельство вынуждает проводить исследования при разных значениях коэффициента асимметрии R .

Растяжение – растяжение ($0 < R < 1$). Рассматривается случай, когда амплитуда циклического напряжения σ_a изменяется в пределах положительных величин от σ_{\min} до σ_{\max} ($0 < \sigma_{\min} \leq \sigma_a \leq \sigma_{\max}$, растяжение). Колебания с амплитудами напряжения σ_a , изменяющимися в пределах $\sigma_{\min} \leq \sigma_a \leq \sigma_{\max}$, можно представить как наложение двух колебаний с $R = 0$, амплитудами напряжений равными σ_{\min} и σ_{\max} соответственно и периодами, сдвинутыми на $\pi/2$ (рис. 9,а):

$$\sigma_a = \sigma_{\max} \sin^2\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + \sigma_{\min} \cos^2\left(\frac{n\pi t}{T}\right), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (17)$$

Здесь π/T – круговая частота; T – период колебаний.

В соответствии с (17) рассматриваются два отдельных испытания с $R = 0$ и амплитудами с σ_{\min} (событие В) и с σ_{\max} (событие А) соответственно. Для этих испытаний (событий) в соответствии с (13) предсказанные вероятности разрушения определяются из соотношений

$$\begin{aligned} p_{\min} &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\sigma_{\min} - \sigma_{b0}}{\delta}\right)^{\gamma}\right\}; \\ p_{\max} &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{b0}}{\delta}\right)^{\gamma}\right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вероятность разрушения при одновременном появлении событий А и В определяется вероятностью разности событий А и В:

$$\begin{aligned} P(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) &= P(\sigma_{\max}) - P(\sigma_{\max} \sigma_{\min}) = \\ &= P(\sigma_{\max})[1 - P(\sigma_{\min} | \sigma_{\max})]. \end{aligned} \quad (19)$$

Условная вероятность разрушения от минимальной нагрузки $P(\sigma_{\min} | \sigma_{\max})$ при присутствии максимальной нагрузки мала. Она растет с приближением σ_{\min} к σ_{\max} , т.е. с приближением R к единице, и в работе она принята в виде степенного закона

$$P(\sigma_{\min} | \sigma_{\max}) = hR^{\beta}. \quad (20)$$

Коэффициент пропорциональности h и показатель степени β могут быть установлены из экспериментальных данных. Условная вероятность (20) ограничена сверху. При $R = 0$ условная вероятность $P(\sigma_{\min} | \sigma_{\max})$ равна нулю и соотношение (19) приводит к безуслов-

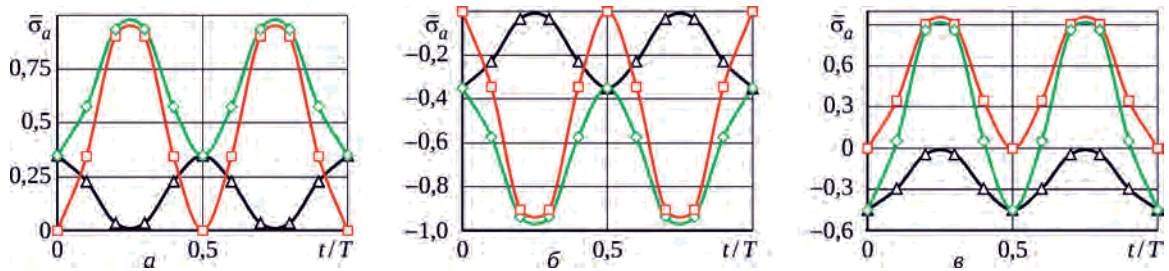


Рис. 9. Представление колебаний (зеленые линии) в виде суперпозиции двух колебаний (красные и черные линии) с простыми коэффициентами асимметрии R :
 $a - 0 < R \leq 1$; $б - 1 \leq R < \infty$; $в - -1 \leq R < 0$ и $-\infty < R \leq -1$

ной вероятности $P(\sigma_{\max})$. Вероятность разности (19) меньше безусловной вероятности $P(\sigma_{\max})$, и вследствие этого долговечность изделия повышается, что качественно подтверждается экспериментальными данными. На рис. 10 приведены усталостные кривые для коэффициента асимметрии, изменяющегося от $R = 0$ (сплошная красная кривая) до $R = 0,9$ (оранжевая кривая) с шагом 0,15. В расчетах принято $h = 0,8$; $\beta = 0,5$.

Сжатие – сжатие ($0 \leq R < \infty$). Рассматривается случай, когда амплитуда циклического напряжения σ_a изменяется в пределах отрицательных величин от σ_{\max} до σ_{\min} ($\sigma_{\min} \leq \sigma_a \leq \sigma_{\max} < 0$, сжатие). Колебания с амплитудами напряжений σ_a , изменяющимися в пределах $\sigma_{\min} \leq \sigma_a \leq \sigma_{\max}$, представляются в виде наложения

двух колебаний с $R = \infty$, амплитудами напряжений равными σ_{\min} и σ_{\max} соответственно и периодами, сдвинутыми на $\pi/2$. Они описываются соотношениями (17) с соответствующими отрицательными коэффициентами σ_{\min} и σ_{\max} (см. рис. 9,б).

В соответствии с (17) рассматриваются два отдельных испытания (события) с $R = \infty$ и амплитудами с σ_{\min} (событие А) и с σ_{\max} (событие В) соответственно. Для этих испытаний в соответствии с (13) вероятности разрушения могут быть определены соотношениями (18), в которых в качестве параметров σ_{b0} , δ , γ использованы параметры распределения Вейбулла σ_{b0}^* , δ^* , γ^* , определенные статическими испытаниями образцов на сжатие.

Вероятность разрушения при совместном появлении событий А и В определяется вероятностью разности событий А и В:

$$P(\sigma_{\min} - \sigma_{\max}) = P(\sigma_{\min}) - P(\sigma_{\min} \sigma_{\max}) = P(\sigma_{\min})[1 - P(\sigma_{\max} | \sigma_{\min})]. \quad (21)$$

Условная вероятность разрушения от максимальной нагрузки $P(\sigma_{\max} | \sigma_{\min})$ мала. Она растет с приближением σ_{\max} к σ_{\min} , т.е. с приближением R к единице, и может быть принята в виде степенного закона

$$P(\sigma_{\max} | \sigma_{\min}) = hR^\beta.$$

Коэффициент пропорциональности h и показатель степени β могут быть установлены по экспериментальным данным. Условная вероятность ограничена сверху. При $R = \infty$ условная вероятность $P(\sigma_{\max} | \sigma_{\min}) = 0$ и соотношение (21) приводит к безусловной вероятности $P(\sigma_{\min})$. Вероятность разности (21) меньше безусловной вероятности $P(\sigma_{\min})$, и вследствие этого долговечность изделия повышается, что качественно подтверждается экспериментальными данными. На рис. 11 приведены усталостные кривые для коэффициента асимметрии, изменяющегося от $R = 2$ (сплошная красная кривая) до $R = 12$ (оранжевая кривая) с шагом 2. В расчетах принято $h = 0,35$; $\beta = 0,5$.

Растяжение – сжатие. Рассматривается случай, когда амплитуда циклического напряжения σ_a изменяется в пределах от σ_{\min} до σ_{\max} , т.е. $\sigma_{\min} \leq \sigma_a \leq \sigma_{\max}$. При этом предполагается, что σ_{\min} является величиной

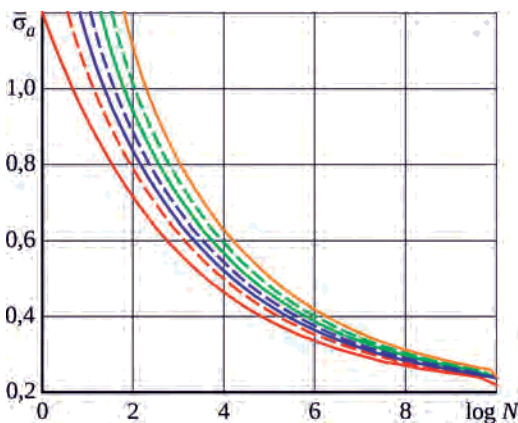


Рис. 10. S-N-кривые для $0 < R \leq 1$

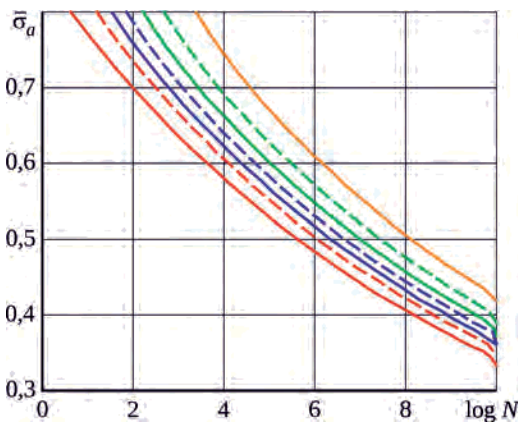


Рис. 11. S-N-кривые для $1 \leq R < \infty$

отрицательной (сжатие), а σ_{\max} – положительной (растяжение). Колебания с амплитудами напряжений σ_a , изменяющимися в пределах $\sigma_{\min} \leq \sigma_a \leq \sigma_{\max}$, представляются в виде последовательности двух колебаний с $R = 0$ и $R = \infty$, амплитудами напряжений равными σ_{\min} и σ_{\max} соответственно и разными периодами без сдвига (см. рис. 9,в). Рассматриваются два отдельных испытания (события): с $R = 0$ и амплитудой с σ_{\max} (событие А) и с $R = \infty$ и амплитудой с σ_{\min} (событие В) Для этих событий в соответствии с (13) вероятности разрушения p_{\max} или p_{\min} могут быть определены соотношениями (18), в которых при $R = 0$ использованы параметры σ_{b0} , δ , γ , определенные испытаниями на растяжение, а при $R = \infty$ использованы параметры распределения Вейбулла σ_{b0}^* , δ^* , γ^* , определенные статическими испытаниями образцов на сжатие. Оценка вероятности разрушения p выполнена согласно [16] в рамках задачи о повторении опыта с исходами: разрушение от растяжения с вероятностью p_{\max} или разрушение от сжатия с вероятностью p_{\min} . Соответствующие вероятности неразрушения определяются из равенств $q_{\max} = 1 - p_{\max}$, $q_{\min} = 1 - p_{\min}$. Вероятность разрушения p на N -м цикле нагружения от растяжения при совместном появлении событий А и В вычисляется из равенства [46]

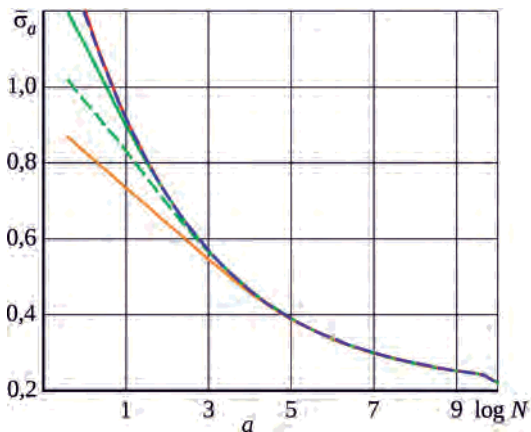
$$p = (p_{\max} + p_{\min} - 2p_{\max}p_{\min})q_{\max}^{N-1}q_{\min}^{N-1}p_{\max}. \quad (22)$$

Аналитическое определение числа циклов нагружения N , при которых вероятность разрушения p максимальна, приводит к зависимости

$$N = \frac{-1}{\log(q_{\max}q_{\min})} = \frac{-1}{\log(1-p_{\max}) + \log(1-p_{\min})}. \quad (23)$$

Очевидно, что при $p_{\min} = 0$ или $p_{\max} = 0$ из (23) следует равенство (15), т.е. соотношение (23) содержит в себе частные случаи нагружения.

На рис. 12 приведены результаты расчетов, выполненных с использованием соотношений (23) и (18). В случае разрушения от растяжения (рис. 12,а), для коэффициента асимметрии R , изменяющегося от 0



до -1 с шагом $-0,1(6)$, наличие сжимающих напряжений приводит к повышению вероятности разрушения и снижению характеристик усталости при повышенных амплитудах напряжений. При малых амплитудах напряжений характеристики усталости не зависят от коэффициента асимметрии R . В случае разрушения от сжатия (рис. 12,б), для коэффициента асимметрии R , изменяющегося от -1 до -7 с шагом -1 , наличие растягивающих напряжений приводит к повышению характеристик усталости материала. Представляется, что подход (22), использованный для оценки долговечности, недостаточно охватывает явление.

Диаграммы Гудмана. Одним из недостатков S - N -кривых является то, что они построены для конкретного значения коэффициента асимметрии цикла нагружения R . Нет способов определения S - N -кривой для R по известным S - N -кривым, полученным для других значений R . Поэтому на практике применение S - N -кривой, построенной для одного конкретного значения R , очень ограничено. Методом, позволяющим построить S - N -кривые для разных значений R , является применение кривых постоянной долговечности, или диаграммы Гудмана. Диаграмма Гудмана представляет собой линию постоянной усталостной долговечности при различных комбинациях постоянных σ_{st} и переменных σ_{vib} напряжений, которые непосредственно связаны с коэффициентом асимметрии R :

$$\begin{aligned} \sigma_{st} &= 0,5(1+R)\sigma_{\max} = \frac{0,5(1+R)\sigma_{\min}}{R}; \\ \sigma_{vib} &= 0,5(1-R)\sigma_{\max} = \frac{0,5(1-R)\sigma_{\min}}{R}. \end{aligned} \quad (24)$$

Диаграмма Гудмана так же, как и S - N -кривые, является феноменологической характеристикой композиционного материала. Она инвариантна к конкретным формам разрушения, их комбинациям и переходам от одной формы к другой. Вместе с тем это крайне удобный инструмент для оценки долговечности при проектировании изделий.

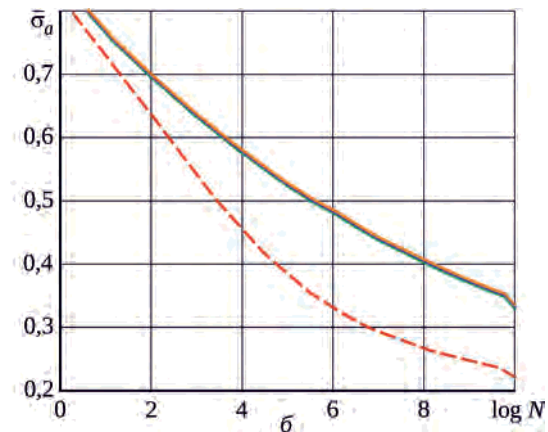


Рис. 12. S - N -кривые для $-1 \leq R < 0$ (а) и $-\infty < R \leq -1$ (б)

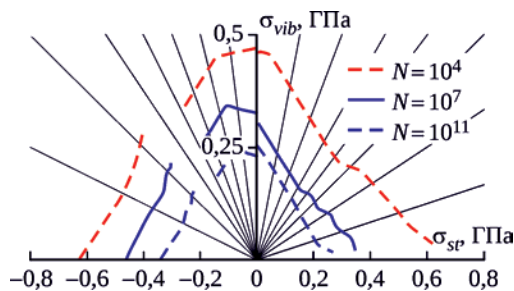


Рис. 13. Диаграмма Гудмана для разного числа циклов N

Построение диаграммы Гудмана на практике требует большого количества испытаний, покрывающих широкую область значений коэффициента асимметрии R и числа циклов N . Разработанный метод построения S - N -кривых (16) позволяет без обращения к любым усталостным испытаниям аналитически построить диаграмму Гудмана (рис. 13) на основе данных о статической прочности материала. На представленной диаграмме по оси абсцисс отложены определенные по фор-

мулам (24) постоянные напряжения σ_{st} , а по оси ординат – переменные напряжения σ_{vib} .

Заключение. Несмотря на то, что представленные здесь методы и результаты построения S - N -кривых в широкой области изменения коэффициента асимметрии R нуждаются в экспериментальной проверке, аналитическое определение уровней равной (требуемой) долговечности представляет несомненный прикладной интерес. Работы в этом направлении продолжаются.

Заключение

Исследования по оценке долговечности изделий, начатые еще в начале XIX столетия, продолжаются. Особый характер они приобрели с началом применения композиционных материалов. В настоящее время сложилось понимание проблем, которые формируют усталостную долговечность изделий из композитов. В русле решения этих проблем находят предложения, описанные в настоящей работе.

Исследования по оценке усталостной долговечности композиционных материалов были начаты при поддержке Фонда фундаментальных исследований ЦИАМ, бессменным руководителем которого был А.Б. Ватажин.

Литература / Reference

- Jollivet T., Peyrac C., Lefebvre F. Damage of composite materials // Procedia Engineering. 2013. Vol. 66: Fatigue Design 2013, International Conference Proceedings. P. 746–758.
- Fatigue damage modeling of composites structures: the ONERA viewpoint / M. Kaminski, F. Laurin, J.-F. Maire, C. Rakotoarisoa, E. Hemon // Aerospace Lab. 2015. Iss. 9. Art. AL09-06. 12 p.
- Черепанов Г.П., Ершов Л.В. Механика разрушения. М.: Машиностроение, 1977. 224 с.
Cherepanov G.P., Ershov L.V. Mekhanika razrusheniia [Fracture mechanics]. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 224 p.
- Liu Y.-M., Mitchell T.E., Wadley H.N.G. Anisotropic damage evolution in a 0°/90° laminated ceramic-matrix composite // Acta Materialia. 2000. Vol. 48, iss. 20. P. 4841–4849.
- Каримбаев Т.Д., Матиухин Д.В. Об оценке усталостной прочности образцов из полимерных композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22, № 3. С. 329–341.
Karimbaev T.D., Matiukhin D.V. Ob otsenke ustalostnoi prochnosti obraztsov iz polimernykh kompozitsionnykh materialov [On the assessment of fatigue strength of samples made of polymer composite materials]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii [Mechanics of Composite Materials and Structures]. 2016. Vol. 22, no. 3. P. 329–341.
- Sendeckyj G.P. Life prediction for resin-matrix composite materials // Fatigue of composite materials / ed. K.L. Reifsnider. Elsevier, 1990. (Composite Material Series; vol. 4). P. 431–483.
- Degriek J., Van Paeppegem W. Fatigue damage modelling of fibre-reinforced composite materials: review // Applied Mechanics Reviews. 2001. Vol. 54, iss. 4. P. 279–300.
- Биргер И.А. Детерминированные и статистические модели долговечности // Проблемы надежности летательных аппаратов / под ред. И.Ф. Образцова и А.С. Вольмира. М.: Машиностроение, 1985. С. 105–150.
Birger I.A. Determinirovannye i statisticheskie modeli dolgovechnosti [Deterministic and statistical models of durability]. Problemy nadezhnosti letatel'nykh apparatov [Problems of reliability of aircraft]. Edited by I.F. Obratsov and A.S. Vol'mir. Moscow: Mashinostroenie, 1985. P. 105–150.
- Конструкционная прочность материалов и деталей газотурбинных двигателей: сб. статей под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Балашова. М.: Машиностроение, 1981. 222 с.
Konstruktsionnaia prochnost' materialov i detalei gazoturbinykh dvigatelei [Structural strength of gas turbine engines' materials and parts]: collection of articles. Edited by I.A. Birger, B.F. Balashov. Moscow: Mashinostroenie, 1981. 222 p.
- Vassilopoulos A.P., Manshadi B.D., Keller T. PNL constant life diagram formulation for FRP composite materials. 2010. 10 p. (14th European Conference on Composite Materials, 7–10 June 2010, Budapest, Hungary; paper 240-ECCM14).

-
11. Stammes E., Nijssen R.P.L., Westphal T. Static and fatigue tests on resin for wind turbine blades. 2010. (14th European Conference on Composite Materials, 7–10 June 2010, Budapest, Hungary; paper 199-ECCM14).
 12. Hashin Z., Rotem A. A fatigue criterion for fiber reinforced composite materials // *Journal of Composite Materials*. 1973. Vol. 7, nr 4. P. 448–464.
 13. Lawrence Wu C.M. Thermal and mechanical fatigue analysis of CFRP laminates // *Composite Structures*. 1993. Vol. 25. P. 339–344.
 14. Fawaz Z., Ellyin F. Fatigue failure model for fiber-reinforced materials under general loading conditions // *Journal of Composite Materials*. 1994. Vol. 28, nr 15. P. 1432–1451.
 15. Life predictions for fatigue of T800/5245 carbon fibre composites: II. Variable-amplitude loading / N. Gathercole, H. Reiter, T. Adam, B. Harris // *International Journal of Fatigue*. 1994. Vol. 16, iss. 8. P. 533–547.
 16. Kassapoglou Ch. Predicting the structural performance of composite structures under cycling loading; doctoral thesis. 2012. xviii, 140 p.
 17. Каримбаев Т.Д., Матюхин Д.В., Пальчиков Д.С. Математическая модель предсказания остаточной прочности композиционных материалов при усталостных испытаниях // *Проблемы и перспективы развития двигателестроения: Международная научно-техническая конференция, 22–24 июня 2016 г.: материалы докладов*. Самара, 2016. Ч. 2. С. 162–163.
Karimbaev T.D., Matiukhin D.V., Pal'chikov D.S. Matematicheskaiia model' predskazaniia ostatochnoi prochnosti kompozitsionnykh materialov pri ustalostnykh ispytaniiaakh [Mathematical model of predicting residual strength of composite materials during fatigue tests]. Problemy i perspektivy razvitiia dvigatelestroeniia [Problems and Prospects of Growth in Engine Development Field]: International Scientific and Technical Conference, June 22–24, 2016: proceedings. Samara, 2016. Part 2. P. 162–163.
 18. Jenkins M.G., Labossiere P.E., Salem J.A. Cumulative damage mechanics: characterization, modeling and interpretation of progressive failure in ceramics and composites // *ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea, and Air*, June 14–17, 2004, Vienna, Austria. Vol. 2. P. 417–424. GT2004-54013.
 19. Highsmith A.L., Reifsnider K.L. Stiffness-reduction mechanisms in composite laminates // *Damage in Composite Materials: Basic Mechanisms, Accumulation, Tolerance, and Characterization* / K.L. Reifsnider, editor. ASTM, 1982. (ASTM special technical publication; 775). P. 103–117.
 20. Chow C.L., Yang F., Asundi A. A tree-dimensional analysis of symmetric composite laminates with damage // *International Journal of Damage Mechanics*. 1993. Vol. 2. P. 229–245.
 21. Hahn H.T., Kim R.Y. Fatigue behaviour of composite laminates // *Journal of Composite Materials*. 1976. Vol. 10, nr 2. P. 156–180.
 22. O'Brien T.K., Reifsnider K.L. Fatigue damage evaluation through stiffness measurements in boron-epoxy laminates // *Journal of Composite Materials*. 1981. Vol. 15, nr 1. P. 55–70.
 23. Стрижиус В.Е. Расчет усталостной долговечности элементов композитных авиаконструкций по условиям их остаточной прочности // *Механика композитных материалов*. 2014. Т. 50, № 5. С. 795–810.
Strizhius V.E. Raschet ustalostnoi dolgovechnosti elementov kompozitnykh aviakonstruktsii po usloviiam ikh ostatochnoi prochnosti [Analysis of the fatigue life of composite airframe elements according to the conditions of their residual strength]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 2014. Vol. 50, No. 5. P. 795–810.
 24. Chou P.C., Croman R. Residual strength in fatigue based on the strength-life equal rank assumption // *Journal of Composite Materials*. 1978. Vol. 12, nr 2. P. 177–194.
 25. Chou P.C., Croman R. Degradation and sudden-death models of fatigue of graphite/epoxy composites // *Composite Materials: Testing and Design (Fifth Conference)* / S.W. Tsai, editor. ASTM, 1979. (ASTM special technical publication; 674). P. 431–454.
 26. Karimbaev T.D., Matiukhin D.V. About forming of criteria of sample fatigue from polymer composite materials // *New Trends on Integrity – Reliability – Failure: proceedings of the 5th International Conference on Integrity – Reliability – Failure IRF 2016, Porto/Portugal, 24–28 July 2016* / ed. J.F. Silva Gomes and S.A. Meguid. P. 67–68.
 27. Hahn H.T., Kim R.Y. Proof testing of composite materials // *Journal of Composite Materials*. 1975. Vol. 9, nr 3. P. 297–311.
 28. Sendekyj G.P. Fitting models to composite materials fatigue data // *Test Methods and Design Allowables for Fibrous Composites* / C.C. Chamis, editor. ASTM, 1981. (ASTM special technical publication; 734). P. 245–260.
 29. Halpin J.C., Jerina K.L., Johnson T.A. Characterization of composites for the purpose of reliability evaluation // *Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites* / J.M. Whitney, symposium chairman. ASTM, 1973. (ASTM special technical publication; 521). P. 5–64.
-

-
30. Yang Y.N. Fatigue and residual strength degradation for graphite/epoxy composites under tension-compression cyclic loadings // *Journal of Composite Materials*. 1978. Vol. 12, nr 1. P. 19–39.
 31. Diao X., Ye L., Mai Y.-W. A statistical study of the fatigue performance of fibre-reinforced composite laminates // *Fatigue in composites: Science and technology of the fatigue response of fibre-reinforced plastics* / ed. by B. Harris. Boca Raton etc.: CRC Press; Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2003. Chap. 16. P. 442–469.
 32. Daniel I.M., Charewicz A. Fatigue damage mechanisms and residual properties of graphite/epoxy laminates // *Engineering Fracture Mechanics*. 1986. Vol. 25, iss. 5/6. P. 793–808.
 33. Schaff J.R., Davidson B.D. Life prediction methodology for composite structures. Part I – Constant amplitude and two-stress level fatigue // *Journal of Composite Materials*. 1997. Vol. 31, nr 2. P. 128–157.
 34. Schaff J.R., Davidson B.D. Life prediction methodology for composite structures. Part II – Spectrum fatigue // *Journal of Composite Materials*. 1997. Vol. 31, nr 2. P. 158–181.
 35. Harris B. Fatigue behaviour of polymer-based composites and life prediction methods. AIB-Vinçotte Leerstoel, 2 March 1995, Belgium, National Fund for Scientific Research. 1985. 28 p.
 36. Paris P., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws // *Journal of Basic Engineering*. Trans. of the ASME, series D. 1963. Vol. 85, iss. 4. P. 528–533. New title: *Journal of Fluids Engineering*.
 37. Quaresimin M., Susmel L., Talreja R. Fatigue behaviour and life assessment of composite laminates under multiaxial loadings // *International Journal of Fatigue*. 2010. Vol. 32, iss. 1. P. 2–16.
 38. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Известия Академии наук СССР. Отдел технических наук*. 1958. № 8. С. 26–31.
Kachanov L.M. O vremeni razrusheniia v usloviiakh polzuchesti [On the time of failure under creep conditions]. *Izvestiia Akademii nauk SSSR. Otdel tekhnicheskikh nauk* [Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Department of Technical Sciences]. 1958. No. 8. P. 26–31.
 39. Guedes R.M. A cumulative damage law based on continuum damage mechanics approach. 2010. (14th European Conference on Composite Materials, 7–10 June 2010, Budapest, Hungary; paper 945-ECCM14).
 40. Stigh U. Continuum damage mechanics and the life-fraction rule // *Journal of Applied Mechanics*. 2006. Vol. 73, iss. 4. P. 702–704.
 41. Каримбаев Т.Д. Подходы при моделировании деформаций композиционных материалов // *Космонавтика и ракетостроение*. 2009. № 1 (54). С. 103–122.
Karimbaev T.D. Podkhody pri modelirovanii deformatsii kompozitsionnykh materialov [Approaches for modeling deformation of composite materials]. *Kosmonavtika i raketostroyeniye* [Cosmonautics and Rocket Engineering]. 2009. No. 1 (54). P. 103–122.
 42. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of a deformable solid body]. Moscow: Nauka, 1979. 744 p.
 43. Каримбаев Т.Д. Оценка разрушения структурных элементов композиционного материала // *Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении*. Вып. 1. М., 1980. (Труды ЦИАМ; № 887). С. 151–161.
Karimbaev T.D. Otsenka razrusheniia strukturnykh elementov kompozitsionnogo materiala [Assessment of failure of structural elements of composite materials]. *Problemy prochnosti i dinamiki v aviadvigatelestroenii* [Problems of strength and dynamics in aircraft engine development]. Issue 1. Moscow, 1980. (Proceedings of CIAM; No. 887). P. 151–161.
 44. Fong J.T. What is fatigue damage? // *Damage in Composite Materials: Basic Mechanisms, Accumulation, Tolerance, and Characterization* / K.L. Reifsnider, editor. ASTM, 1982. (ASTM special technical publication; 775). P. 243–266.
 45. Life prediction for fatigue of T800/5245 carbon-fibre composites: I. Constant-amplitude loading / N. Gathercole, H. Reiter, T. Adam, B. Harris // *International Journal of Fatigue*. 1994. Vol. 16, iss. 8. P. 523–532.
 46. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 564 с.
Ventsel' E.S. Teoriia veroiatnostei [Probability theory]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1962. 564 p.
 47. Whitney J.M. Fatigue characterization of composite materials // *Fatigue of Fibrous Composite Materials* / K.N. Lauraitis, symposium chairman. ASTM, 1981. (ASTM special technical publication; 723). P. 133–151.
 48. Davies A.J., Curtis P.T. Fatigue in aerospace applications // *Fatigue in composites: Science and technology of the fatigue response of fibre-reinforced plastics* / ed. by B. Harris. Boca Raton etc.: CRC Press; Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2003. Chap. 26. P. 686–708.
-

-
49. Степнов М.Н., Шаврин А.В. Статистические методы обработки результатов механических испытаний: справочник. 2-е изд., испр. и доп. М.: Машиностроение, 2005. 399 с.
Stepnov M.N., Shavrin A.V. Statisticheskie metody obrabotki rezul'tatov mekhanicheskikh ispytaniy [Statistical methods of processing results of mechanical tests]: a guide book. 2nd edition, corrected and expanded. Moscow: Mashinostroenie, 2005. 399 p.
 50. Lee J.-W., Daniel I.M., Yaniv G. Fatigue life prediction of cross-ply composite laminates // Composite Materials: Fatigue and Fracture / P.A. Lagace, editor. ASTM, 1989. (ASTM special technical publication; 1012). Vol. 2. P. 19–28.
 51. Amijima S., Fujii T., Hamaguchi M. Static and fatigue tests of a woven glass fabric composite under biaxial tension-torsion loading // Composites. 1991. Vol. 22, iss. 4. P. 281–289.
 52. Gerharz J.J., Rott D., Schuetz D. Schwing fest igke its unter such ungen an Fuegungen in Faserbauweise. BMVg-FBWT. 79-23. 1979.
 53. Damage development in carbon fibre-reinforced polyimides in fatigue loading as a function of stress ratio / G. Maier, H. Ott, A. Protzner, B. Protz // Composites. 1986. Vol. 17, iss. 2. P. 111–120.

Материалы получены редакцией 19.10.2020