

Критерии зарождения повреждений в конструкциях из композиционных материалов

Каримбаев Т.Д.

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, г. Москва

e-mail: karimbayev@ciam.ru

В статье описана разработанная автором мезо-модель композиционного материала, который представлен в виде двухкомпонентной среды. Рассмотрены методы определения параметров модели, сформулированы критерии разрушения компонентов композиционного материала и границы их раздела для однонаправленно-армированного материала. Приведены основные разрешающие уравнения, полученные на основе баланса энергии. На примере решения частной задачи о напряженно-деформированном состоянии модели хвостовика рабочей лопатки вентилятора показана вся цепочка развития событий, состоящая из зарождения повреждения в одной из компонент композиционного материала, перераспределения напряжений в окрестности повреждения, накопления и развития повреждений при увеличении нагрузки и полного насыщения повреждениями, приводящего к исчерпанию несущей способности детали.

Ключевые слова: мезо-модель, композиционный материал, двухкомпонентная среда, критерий разрушения, граница раздела, повреждение.

Criteria of damage origin in constructions made from composite materials

Karimbaev T.D.

CIAM, Moscow

Meso-model of composite material represented by the two-component medium is described. The techniques of the model parameter determination and the failure criteria of composite material constituents and interface boundary of the unidirectionally reinforced materials are considered. Main resolving equations, which were derived on the base of energy balance, are given. Whole chain of events, which consists of failure initiation in one of the composite material constituents, stress redistribution in the damage vicinity, accumulation and development of damage at load increase and full damage cumulation, bringing to loss of carrying capacity, is shown by researches of strain-stress state of fan blade root model.

Keywords: meso-model, composite material, two-component medium, failure criteria, interface boundary, damage.

Введение

Композиционные материалы (КМ) отличаются от традиционно используемых металлов повышенными значениями удельной прочности и жесткости. Их применение в авиадвигателестроении позволяет решить проблемы снижения массы и, соответственно, расхода топлива и освоения высоких температур.

В настоящее время наблюдается расширение использования КМ в аэрокосмической промышленности. При этом наиболее часто используются многослойные с различными схемами армирования или тканые конструкции, в которых может возникать сложное

напряженно-деформированное состояние. Прогнозирование разрушения в конструкциях со сложным внутренним строением при общих условиях нагружения имеет важное значение в инженерных приложениях. Проблеме разрушения посвящено большое число исследований, например, [1 – 4]. Проектирование конструкций из КМ в большинстве случаев основано на критериях прочности [5 – 9], представляющих собой развитие критериев [10], использующихся при проектировании металлических изделий. Эти критерии внедрены в коммерческие программные комплексы, которые представляют собой основной инструмент современного исследователя.

Вместе с тем известно, что механизм разрушения деталей из КМ качественно отличается от присущего изделиям из металла – начальные повреждения в деталях появляются на ранних стадиях их эксплуатации, далеких от исчерпания несущей способности. По существу, весь жизненный цикл изделия из КМ является процессом развития и накопления повреждений.

Традиционное гомогенизированное представление КМ в виде однородного анизотропного тела не различает армирующий материал и матрицу. Этим обусловлены трудности прогнозирования зарождения повреждений, поскольку в таком представлении поля деформаций в пределах компонентов КМ не могут быть смоделированы. Сложность решения задачи прогнозирования зарождения повреждений в конструкциях из КМ обусловлена множеством механизмов разрушения, для моделирования которых необходимы подходы более высокого иерархического уровня, такие как микромасштабные или мезомасштабные представления КМ. Предложенные в 1970-х годах структурные подходы [11, 12] мезомасштабного уровня не получили надлежащего развития. Подходы на уровне микромасштаба по-прежнему трудно реализуемы [13]. Представляют интерес мультимасштабные подходы, в которых среда представляется в виде волокна, окруженного материалом матрицы. Такая модель материала используется при решении задач в рамках феноменологического и составного подходов. Перенос этой модели на слоистое тело с произвольной схемой армирования приведен, например, в работе [14], а вероятностно-статистические подходы рассматриваются в статье [15]. Постановка и решение подобных частных задач свидетельствуют об актуальности развития структурных подходов.

В данной статье описан разработанный вариант механики деформируемой неоднородной среды, позволяющий сформулировать критерии разрушения как компонентов КМ, так и зарождения повреждений на межфазной поверхности. Приведены способы определения параметров деформирования двухкомпо-

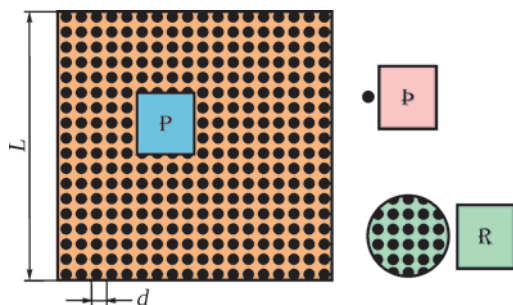


Рис. 1. Осреднения, принятые при построении различных моделей КМ:

P – макроточка ($L \gg d$); R – составная точка ($L \sim d$);
P – микроточка ($L < d$)

нентной среды. Процедура применения механики двухкомпонентной среды к оценке зародившегося повреждения, накопления повреждений и их развития вплоть до критической насыщенности повреждениями, характеризующей исчерпание несущей способности изделия, продемонстрирована на примере решения задачи о напряженно-деформированном состоянии хвостовика рабочей лопатки в плоской постановке.

Структурные критерии прочности

Если представительный элемент КМ принят в виде мезоточки R (рис. 1), то можно определить поля напряжений σ_{ij}^α и деформаций ε_{ij}^α в α -компоненте КМ ($\alpha = 1$ – наполнитель; $\alpha = 2$ – матрица). Известные напряжения σ_{ij}^α в компонентах КМ позволяют вычислить соотношения [16]:

$$c^\alpha = \Pi_{ij}^\alpha \sigma_{ij}^\alpha + \Pi_{ijmn}^\alpha \sigma_{ij}^\alpha \sigma_{mn}^\alpha, \quad (1)$$

где Π_{ij}^α и Π_{ijmn}^α – компоненты тензоров прочности второй и четвертой валентности анизотропной α -компоненты КМ.

Компоненты тензоров прочности удовлетворяют условиям симметрии:

$$\Pi_{ij}^\alpha = \Pi_{ji}^\alpha; \quad \Pi_{ijmn}^\alpha = \Pi_{mnij}^\alpha = \Pi_{jimn}^\alpha = \Pi_{ijnm}^\alpha. \quad (2)$$

Кроме того, при преобразовании координат Π_{ij}^α и Π_{ijmn}^α изменяются по известным правилам [17]. Эти особенности заметно уменьшают число независимых параметров прочности, которые должны быть установлены испытаниями.

Для предложенного подхода характерно, что составляющие тензоров прочности Π_{ij}^α и Π_{ijmn}^α определяются из отдельных испытаний каждой α -компоненты до создания из них КМ. В общем случае составляющие тензоров прочности Π_{ij}^α и Π_{ijmn}^α являются функциями характера нагружения (статическое, длительное, циклическое), окружающих условий (температуры, влажности и других воздействий) и скорости нагружения. Наряду с действующими напряжениями σ_{ij}^α они являются фактором, определяющим условие зарождения повреждений в α -компоненте КМ:

$$c^\alpha \geq 1 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3)$$

Многочисленными исследованиями установлено, что в зависимости от условий нагружения, величин приложенных нагрузок, внутренней структуры КМ, а также характеристик прочности зарождение повреждений происходит в наполнителе ($c^1 \geq 1$, разрыв волокна), либо в матрице ($c^2 \geq 1$, трещина в матрице), либо на границе их раздела (расслоение). Условия (3) позволяют предсказать когезионное зарождение повреждений в α -компоненте КМ, но не позволяют оценить

возможность адгезионного повреждения на контактной поверхности наполнителя и матрицы.

Адгезия компонентов КМ возможна при больших градиентах напряжений или деформаций на границе раздела. Градиенты напряжений могут быть оценены величиной разности $\sigma_{ij}^a = \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2$, а градиенты деформаций – величиной разности $\varepsilon_{ij}^a = \varepsilon_{ij}^1 - \varepsilon_{ij}^2$. Тогда условие зарождения трещины на границе контакта можно принять в одном из вариантов

$$\begin{aligned} c_{\sigma}^a &= \Pi_{ij}^a \sigma_{ij}^a + \Pi_{ijmn}^a \sigma_{ij}^a \sigma_{mn}^a \geq 1; \\ c_{\varepsilon}^a &= D_{ij}^a \varepsilon_{ij}^a + D_{ijmn}^a \varepsilon_{ij}^a \varepsilon_{mn}^a \geq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Π_{ij}^a и Π_{ijmn}^a – элементы тензоров адгезионной прочности различной валентности; D_{ij}^a и D_{ijmn}^a – элементы тензоров предельной деформации различной валентности на границе раздела компонент КМ. Для тензоров Π_{ij}^a , Π_{ijmn}^a и D_{ij}^a , D_{ijmn}^a имеют место условия симметрии (2) и особенности, присущие тензорам прочности компонент КМ. Составляющие тензоров адгезионной прочности и предельной деформации могут быть определены по результатам испытаний макрообразцов из КМ.

Таким образом постулируется, что зарождение повреждения в КМ происходит в момент, когда в какой-либо точке исследуемой конструкции выполняется одно из условий (3) или (4). При этом происходит когезионное разрушение в наполнителе при

$$c^1 \geq 1, c^2 < 1, c_{\sigma}^a < 1 \text{ (либо } c_{\varepsilon}^a < 1); \quad (5^1)$$

когезионное разрушение в матрице при

$$c^1 < 1, c^2 \geq 1, c_{\sigma}^a < 1 \text{ (либо } c_{\varepsilon}^a < 1); \quad (5^2)$$

разрушение на границе раздела при

$$c^1 < 1, c^2 < 1, c_{\sigma}^a \geq 1 \text{ (либо } c_{\varepsilon}^a \geq 1). \quad (5^a)$$

Одновременное выполнение условий $c^1 = c^2 = c_{\sigma}^a = 1$ (либо $c_{\varepsilon}^a = 1$) соответствует наиболее рациональному КМ в конкретном изделии.

В инженерных приложениях в зависимости от условий нагружения и внутренней структуры КМ общие соотношения (5) упрощаются.

Зарождение повреждений в изотропной матрице. Материал матрицы обычно является изотропным и соотношение (5²) может быть принято в виде

$$\begin{aligned} c_{\sigma}^2 &= [(\sigma_{11}^2)^2 + (\sigma_{22}^2)^2 + (\sigma_{33}^2)^2 - \sigma_{11}^2 \sigma_{22}^2 - \sigma_{22}^2 \sigma_{33}^2 - \\ &\quad - \sigma_{11}^2 \sigma_{33}^2 + 3(\sigma_{12}^2)^2 + 3(\sigma_{13}^2)^2 + 3(\sigma_{23}^2)^2]^{0,5}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь σ_b^2 – единственная характеристика прочности, определяемая из испытаний отдельно материала матрицы. Выражение (6) соответствует критерию Мизеса

(теория энергии формоизменения) и позволяет зафиксировать возможность зарождения трещины в материале матрицы при сложном напряженном состоянии.

Зарождение повреждений в волокне. Как правило, в сведениях о прочностных свойствах волокон приводится одна характеристика – их прочность на растяжение. Однако хорошо известно, что углеродные, бескерновые карбид-кремниевые и базальтовые волокна не сопротивляются сжатию. Сжимающие напряжения могут нести керновые волокна бора, карбида кремния и другие. Кроме того, очевидно, что армирующие волокна в общем случае анизотропны и имеют различные прочностные характеристики вдоль σ_{b1}^1 и поперек волокна σ_{b2}^1 . Их прочности на сдвиг в плоскости, содержащей длину волокна τ_{b1}^1 , и в поперечном сечении τ_{b2}^1 отличаются от прочности на сдвиг, определенной из известного для изотропных сред выражения $\tau_b = \sigma_b / \sqrt{3}$. Однако подробных исследований характеристик прочности материала волокна практически невозможно найти в открытых источниках. Ниже предложен вариант критерия прочности трансверсально изотропных волокон:

$$\begin{aligned} c^1 \sigma_b^1 &= [(\sigma_{11}^1)^2 + \alpha[(\sigma_{22}^1)^2 + (\sigma_{33}^1)^2 - \sigma_{22}^1 \sigma_{33}^1] + \\ &\quad + (1 + \alpha - \beta)\sigma_{11}^1(\sigma_{22}^1 + \sigma_{33}^1) + \\ &\quad + \beta[(\sigma_{12}^1)^2 + (\sigma_{13}^1)^2] + 3\alpha(\sigma_{23}^1)^2]^{0,5}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь ось 1 совпадает с направлением волокна, оси 2 и 3 лежат в его поперечном сечении (плоскости изотропии). В соотношение (7) входят безразмерные параметры $\alpha = (\sigma_b^1 / \sigma_{b2}^1)^2$ и $\beta = (\sigma_b^1 / \tau_b^1)^2$ и три независимые характеристики прочности: σ_b^1 – прочность вдоль волокна; σ_{b2}^1 – прочность в поперечной плоскости; τ_b^1 – прочность на сдвиг.

Для ряда армирующих волокон (например, волокон из Е-стекла, арамидных волокон типа Кевлар, бескерновых волокон карбида кремния и др.) анизотропия параметров прочности экспериментально не подтверждена. Для таких волокон следует принять $\alpha = 1$ и $\beta = 3$. **Характеристики адгезионной прочности** практически не изучены, так как адгезионная прочность может быть исследована только в составе КМ. Ниже на основе анализа простейших схем нагружения установлены независимые характеристики адгезионной прочности для однонаправленно-армированных КМ.

При растяжении вдоль волокон (рис. 2,а) компоненты КМ сжимаются в поперечном направлении. Однако из-за заметного различия коэффициентов Пуассона сжатие происходит в разной мере. Возникающие на границе раздела напряжения растяжения при достижении определенной величины σ_{b1}^{a+} могут привести к расслоению вдоль волокна. При сжатии вдоль волокон

более жесткие волокна могут потерять устойчивость и большие искривления волокна приведут к отрыву матрицы от волокна при напряжении σ_{b1}^{a-} .

При сдвиге в плоскости армирования (рис. 2,б) характеристика сдвиговой прочности τ_{b1}^a может инициировать зарождение расслоения на границе раздела.

При знакопеременном напряженном состоянии в плоскости армирования (рис. 2,в) возникают сдвиговые напряжения от волокна и к волокну, которые могут привести к расслоениям при напряжениях τ_{b1}^{a+} и τ_{b1}^{a-} .

При растяжении в поперечной волокнам плоскости (рис. 2,г) начальный обрыв, приводящий к серповидному расслоению, происходит в слабейшем звене: в материале матрицы, в материале волокна (преимущественно в углеродном, бескерновом карбид-кремниевом волокнах) или на границе раздела при напряжениях σ_{b2}^{a+} . При сжатии обрыв на границе раздела может произойти в точке смыкания потоков связующего около волокна, приводя к точечному или серповидному расслоению в окрестности этой точки при напряжениях σ_{b2}^{a-} .

При сдвиге в поперечной волокнам плоскости (рис. 2,д) прочность τ_{b2}^a определяет возможность кругового расслоения. Эта же характеристика сдвиговой прочности определяет возможность начального расслоения при знакопеременном напряженном состоянии в поперечной волокнам плоскости (рис. 2,е).

Совокупность введенных предельных характеристик позволяет сформулировать критерий адгезионной прочности

$$\begin{aligned} 2c^a \sigma_{b2}^a &= \alpha_1 \sigma_{11}^a + \beta_1 \sigma_{22}^a + \beta_1 \sigma_{33}^a + \\ &+ [\alpha_2 (\sigma_{11}^a)^2 + \beta_2 (\sigma_{22}^a)^2 + \beta_2 (\sigma_{33}^a)^2 + \\ &+ (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \sigma_{11}^a (\sigma_{22}^a + \sigma_{33}^a) + 2(\beta_2 - 2\gamma_1) \sigma_{22}^a \sigma_{33}^a + \\ &+ 4\gamma (\sigma_{12}^a)^2 + 4\gamma (\sigma_{13}^a)^2 + 4\gamma_1 (\sigma_{23}^a)^2]^{0,5}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\sigma_{ij}^a = \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2$ и введены обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1 - \sigma_{b1}^{a+} / \sigma_{b1}^{a-}) (\sigma_{b2}^{a+} / \sigma_{b1}^{a+}); \\ \alpha_2 &= (1 + \sigma_{b1}^{a+} / \sigma_{b1}^{a-})^2 (\sigma_{b2}^{a+} / \sigma_{b1}^{a+})^2; \\ \beta_1 &= 1 - \sigma_{b1}^{a+} / \sigma_{b2}^{a-}; \quad \beta_2 = (1 + \sigma_{b1}^{a+} / \sigma_{b2}^{a-})^2; \\ \gamma &= (\sigma_{b2}^{a+} / \tau_{b1}^a)^2; \quad \gamma_1 = (\sigma_{b2}^{a+} / \tau_{b2}^a)^2; \\ \gamma_2 &= (1 + \tau_{b1}^{a+} / \tau_{b1}^{a-})^2 (\sigma_{b2}^{a+} / \tau_{b1}^{a+})^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Следует учитывать, что параметры адгезионной прочности удовлетворяют условию совместности

$$\begin{aligned} 1 / \sigma_{b1}^{a+} - 1 / \sigma_{b2}^{a+} - 1 / \sigma_{b1}^{a-} + 1 / \sigma_{b2}^{a-} &= \\ = 1 / \tau_{b1}^{a+} - 1 / \tau_{b1}^{a-}. \end{aligned} \quad (10)$$

Число независимых параметров адгезионной прочности равно семи при учете условия их совместности (10). При этом пять параметров прочности обусловлены трансверсальной изотропией прочностных свойств однонаправленно-армированных материалов и два – отличием адгезионной прочности при растяжении и сжатии.

Введенные критерии (6) – (9) определяют зарождение повреждения в наиболее слабом элементе КМ.

Коэффициенты запаса локальной прочности

$$k^1 = 1/c^1; \quad k^2 = 1/c^2; \quad k^a = 1/c^a \quad (11)$$

устанавливаются на основе опыта эксплуатации конструкций из КМ. Их допустимые значения уточняются по мере накопления знаний и развития технологии проектирования и изготовления. Априори ясно, что допустимые уровни запасов прочности k^1 , k^2 и k^a различны и обусловлены как материалами компонентов, так и технологией производства КМ.

Структурная теория композиционных материалов

Одна из проблем при определении зарождения повреждений с помощью предложенных соотношений (5) заключается в установлении напряженно-деформированного состояния не только в конструкции из КМ, но и в компонентах КМ-детали. Для установления их разработаны определяющие уравнения [11, 12]. Таковыми являются:

– кинематические соотношения

$$\varepsilon_{ij}^\alpha = 0,5(u_{i,j}^\alpha + u_{j,i}^\alpha); \quad (12^k)$$

– физические соотношения

$$\varepsilon_{ij}^\alpha = a_{ijmn}^{\alpha\beta} \sigma_{mn}^\beta + \alpha_{ij}^\alpha \Delta T^\alpha; \quad (12^\phi)$$

– уравнения движения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^\alpha + X_i^\alpha &= \rho^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_i^\beta}{\partial t^2} + \\ &+ (-1)^\beta g_{ij} \frac{\partial(u_j^\alpha - u_j^\beta)}{\partial t} + (-1)^\beta b_{ij} (u_j^\alpha - u_j^\beta); \end{aligned} \quad (12^a)$$

– уравнения теплопроводности

$$\lambda_{ij}^\alpha T_{,ij}^\alpha + W^\alpha = T^\alpha \beta_{ij}^{\alpha\beta} \varepsilon_{ij}^\beta + c^\alpha T^\alpha. \quad (12^T)$$

Здесь u_i^α – i -ая ($i = 1, 2, 3$) составляющая вектора перемещений в α -компоненте КМ; σ_{ij}^α и ε_{ij}^α – компоненты тензоров напряжений и деформаций в α -компоненте КМ; T^α , ΔT^α – температура и ее приращение в α -компоненте КМ; X_i^α – составляющая объемной силы в α -компоненте КМ; W^α – источники тепла в α -компоненте КМ; $a_{ijmn}^{\alpha\beta}$ – составляющая тензора податливости в α -компоненте КМ при $\beta = \alpha$ и составляющие тензора связан-

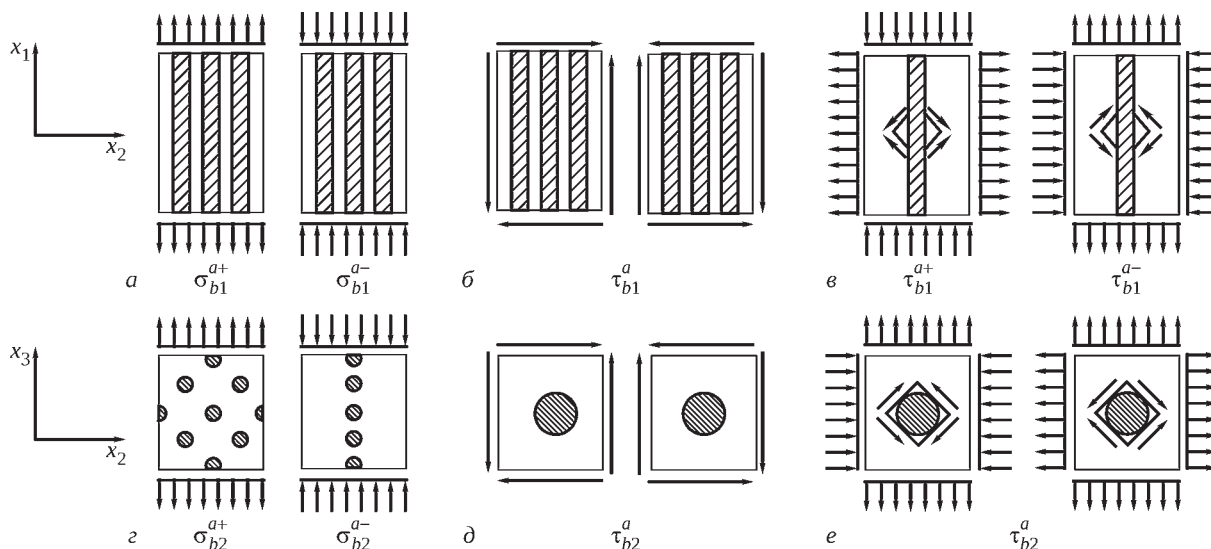


Рис. 2. Формирование критериев адгезионной прочности в однонаправленно-армированных КМ при растяжении или сжатии (а, з), сдвиге (б, д) и знакопеременном напряженном состоянии (в, е): а, б, в – в плоскости армирования; з, д, е – в поперечной волокнам плоскости

ности податливостей компонент КМ при $\beta \neq \alpha$; α_{ij}^{α} – составляющие тензора коэффициентов линейного расширения в анизотропной α -компоненте КМ; $\rho^{\alpha\beta}$ – плотность α -компоненты КМ при $\beta = \alpha$ и плотность присоединенной массы при $\beta \neq \alpha$ (или параметр инерционного взаимодействия); g_{ij} и b_{ij} – параметры вязкого и механического взаимодействия (трения) компонент КМ; c^{α} и λ_{ij}^{α} – удельная теплоемкость при постоянной деформации и характеристики теплопроводности анизотропной α -компоненты КМ.

Параметры $\beta_{ij}^{\alpha\beta}$ связаны с составляющими тензора температурного линейного расширения α_{ij}^{α} по формулам

$$\beta_{ij}^{\alpha\beta} = c_{ijmn}^{\alpha\beta} \alpha_{mn}^{\beta}, \quad (13)$$

где $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ – параметры упругости анизотропной α -компоненты КМ при $\beta = \alpha$ и параметры жесткости сцепления компонент КМ при $\beta \neq \alpha$.

Источники тепла в компонентах КМ могут быть обусловлены отличием как градиентов температур, так и самими температурами в компонентах КМ:

$$W^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha} (T_{,i}^{\alpha} - T_{,i}^{\beta}) + \lambda^{\alpha} (T^{\alpha} - T^{\beta}) + \Omega^{\alpha}. \quad (14)$$

Здесь λ_i^{α} и λ^{α} – параметры теплообмена на границе раздела компонент КМ; Ω^{α} – собственные источники тепла; $\beta \neq \alpha$; $\alpha = 1, 2$.

В соотношениях (12) – (14) после запятой в нижних индексах подразумевается дифференцирование по соответствующей координате. По одинаковым нижним индексам и верхнему параметру β ($\beta = 1, 2$) предполагается суммирование. Когда говорится о параметрах в α -компоненте КМ, то понимается их осредненное значение в области, занятой ей в мезоточке [18]. Знак осреднения $\langle \dots \rangle$ не используется для упрощения записи.

Об определении параметров двухкомпонентной среды. Если допустить, что свойства компонент КМ сохраняются в результате их переработки в КМ, то неизвестными, подлежащими определению, в основных соотношениях (12) – (14) являются: параметры жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$), плотности присоединенной массы $\rho^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$), параметры вязкого g_{ij} и механического b_{ij} взаимодействия, а также параметры теплообмена λ_i^{α} и λ^{α} на границе раздела компонент КМ [19].

Прежде чем будут рассмотрены способы определения перечисленных характеристик, следует заметить, что число независимых параметров жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ и плотности присоединенной массы $\rho^{\alpha\beta}$ предложенной мезо-модели КМ (12) и в модели упругого однородного анизотропного тела [17] совпадает:

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn} \varepsilon_{mn} - \beta_{ij} \Delta T. \quad (15)$$

Утверждение справедливо и для КМ с определенной симметрией внутреннего строения. Так, например, для слоистых и тканых КМ (ортотропное тело) число независимых упругих параметров равно девяти, а для однонаправленно-армированных структур (трансверсально изотропное тело) число их снижается до пяти.

Параметры жесткости сцепления (связанной податливости). Параметры жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$) могут быть определены испытаниями мульти-модельных образцов при различных условиях нагружения, например, испытаниями на растяжение волокон, окруженных материалом матрицы. Техническая трудность выполнения таких испытаний и, в первую очередь, ограниченность числа параметров, которые могут быть определены этим методом, обусловили необходимость поиска других расчетных и экспериментальных способов определения $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$.

Для расчетной оценки верхних и нижних границ параметров жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$) мезо-модели КМ (12) был использован обобщенный на двухкомпонентные среды вариационный метод, предложенный Хашиным и Розеном [20] для установления верхних и нижних границ параметров упругости однородной анизотропной среды. Путем сравнения потенциальной и дополнительной энергий они установили, что верхние и нижние границы параметров однородной среды сильно отличаются [20]. Полученные автором верхние и нижние границы параметров жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$) мезо-модели КМ также сильно отличались. Эти оценки имеют теоретическое значение, но мало пригодны для инженерных приложений.

Ниже для определения параметров жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$) мезо-модели КМ используются результаты испытаний макрообразцов. Известные значения упругих характеристик c_{ijmn} однородной анизотропной среды (15) и компонентов КМ $c_{ijmn}^{\alpha\alpha}$ используются в аналитическом анализе напряженно-деформированного состояния образца с помощью соотношений (12). Это позволяет установить функциональную связь для определения неизвестных параметров жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ мезо-модели КМ:

$$c_{ijmn}^{\alpha\beta} = c_{ijmn}^{\alpha\beta}(c_{ijmn}, c_{ijmn}^{\alpha\alpha}, v^\alpha), \quad \beta \neq \alpha, \quad (16)$$

где v^α – объемное содержание α -компоненты КМ.

Используя модели деформирования Максвелла и Фойхта для изодеформаций при растяжении вдоль волокон и изонапряжений при растяжении в плоскости изотропии и сдвиге в плоскости армирования и следуя работам, выполненным для однородных анизотропных сред (например, [20 – 22] и др.), получены следующие оценки независимых параметров жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$) мезо-модели КМ для трансверсально изотропной неоднородной среды:

$$\begin{aligned} c_{1111}^{12} &= 1/E_1 + \left[(E_1 c_{1111}^{11} c_{1111}^{22} - c_{1111}^{11} - c_{1111}^{22} + 1/E_1) / E_1 \right]^{0.5}; \\ c_{2211}^{21} &= \{v_{12} + [c_{2211}^{11}(c_{1111}^{22} - c_{1111}^{12}) + c_{2211}^{22}(c_{1111}^{11} - c_{1111}^{21})] / \Delta\} / E_1; \\ 2c_{2222}^{12} &= 1/E_2 - c_{2222}^{11} - c_{2222}^{22} - (c_{2211}^{11} + c_{2211}^{21})A_{11}^1 - (c_{2211}^{22} + c_{2211}^{12})A_{11}^2; \\ 2c_{3322}^{12} &= -v_{32} / E_2 - c_{3322}^{11} - c_{3322}^{22} - [(c_{3311}^{11} + c_{3311}^{21})A_{11}^1 + (c_{3311}^{12} + c_{3311}^{22})A_{11}^2]; \\ 2c_{1212}^{12} &= c_{1212}^{11} + c_{1212}^{22} - 1/G_{12}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $E_1, E_2, G_{12}, v_{12}, v_{32}$ – экспериментально определенные параметры упругости трансверсально изотропной однородной среды. Кроме того, введены обозначения:

$$\begin{aligned} A_{11}^1 &= \left\{ (c_{1111}^{22} - c_{1111}^{12})v_{12} / E_1 - [c_{1111}^{22}(c_{1122}^{11} + c_{1122}^{12}) - c_{1111}^{12}(c_{1122}^{21} + c_{1122}^{22})] \right\} / \Delta; \\ A_{11}^2 &= \left\{ (c_{1111}^{11} - c_{1111}^{21})v_{12} / E_1 - [c_{1111}^{11}(c_{1122}^{21} + c_{1122}^{22}) - c_{1111}^{21}(c_{1122}^{11} + c_{1122}^{12})] \right\} / \Delta; \\ \Delta &= c_{1111}^{11}c_{1111}^{22} - c_{1111}^{12}c_{1111}^{21}. \end{aligned}$$

В таблице приведены расчетные значения параметров жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$) трансверсально изотропного стеклопластика, изотропные свойства компонентов которого $E^1 = 72\,500$ МПа, $v^1 = 0,2$, $E^2 = 2940$ МПа, $v^2 = 0,35$.

Параметры инерционного взаимодействия. Если кинетическая энергия K представлена в квадратичной форме

$$2K = \rho^{\alpha\beta} \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial t} \frac{\partial u_i^\beta}{\partial t},$$

то вследствие теоремы Лагранжа слагаемые, содержащие динамический параметр инерционного взаимодействия ρ^{12} , появляются в уравнениях движения (12^а) [23].

Путем сравнения экспериментальной и расчетной скорости распространения продольных волн в [24, 25] показано, что в упруго-пористых средах этим параметром можно пренебречь. Такое же заключение получено в расчетных исследованиях [26] распространения волн в направлении армирования в двухкомпонентной среде (12). В [27 – 29] дана другая оценка параметра ρ^{12} , которая представляется завышенной. Противоречивые заключения обуславливают необходимость дальнейших исследований в смесях двух твердых тел.

Параметры вязкого и механического трений. Параметры вязкого g_{ij} и механического b_{ij} взаимодействия (трений) являются особенностью всех моделей «смесей». Например, для изотропной упруго-пористой среды, заполненной жидкостью, параметр вязкого взаимодействия определен в соответствии с законом Дарси равенством $g = \mu v_2^2 / K_2$ [30], где μ – вязкость жидкости; v_2 – пористость; K_2 – проницаемость.

В теории консолидации двух твердых тел роль параметров g_{ij} заметна для композиций, имеющих вязкоупругую матрицу. Саморазогрев колеблющихся деталей из КМ описывается моделью (12) при учете g_{ij} – диффузионного механизма взаимодействия их компонентов. Способы определения параметров g_{ij} могут быть позаимствованы из механики упруго-

Таблица. Расчетные значения параметров жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$)

Относительное объемное содержание наполнителя, v^1	Параметр жесткости сцепления, МПа				
	$c_{1111}^{\alpha\beta}$	$c_{1122}^{\alpha\beta}$	$c_{2222}^{\alpha\beta}$	$c_{2222}^{\alpha\beta} - 2c_{2323}^{\alpha\beta}$	$c_{1212}^{\alpha\beta}$
0,2	0,07	1,94	41,4	-88,3	245
0,4	153	212	512	107	
0,6	140	285	733	103	
0,8	79	109	491	-156	

пористых сред, в рамках которой разработаны экспериментальные методы их определения [31].

Для трансверсально изотропного тела ненулевыми элементами тензора механического взаимодействия являются диагональные элементы b_{11} , b_{22} , $b_{33} = b_{22}$. В [32] из решения задачи о растяжении элементарной ячейки слоистого тела толщиной H вдоль и поперек направления волокон получена следующая оценка

$$C = 3A^1 A^2 / H^2 (v^1 A^1 + v^2 A^2),$$

в которой для определения b_{11} следует принять $A^\alpha = \mu^\alpha$, а для b_{22} – $A^\alpha = \lambda^\alpha + 2\mu^\alpha$. Здесь v^α – объемное содержание; λ^α и μ^α – параметры Ляме α -компоненты КМ. Аналогичные расчетные оценки параметра механического взаимодействия получены в [27 – 29, 33, 34], а также в [35 – 37]. В [37] искусственным приемом удалось разделить продольные и поперечные движения и показать, что параметр механического взаимодействия принимает различные значения на ветвях дисперсионной кривой. На первой ветви дисперсионной кривой параметр механического взаимодействия совпадает с его статическим значением. Значения параметра, определенные на других ветвях, зависят от плотности компонентов КМ. Аналогичные аналитические результаты получены в [38] при исследовании собственных колебаний консольно закрепленных балок из КМ на основе соотношений (12). В [38] показано, что при больших значениях параметра механического взаимодействия b_{11} уравнение собственных частот балки сводится к уравнению, получаемому на основе механики однородной анизотропной среды. При их малых значениях одной частоте соответствуют две формы колебаний, которые при больших волновых числах (малой длине волны) и малой жесткости сцепления $c_{ijmn}^{\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$) становятся формами колебаний отдельно матрицы и отдельно волокна. Промежуточная область описывается соотношениями (12), и при экспериментальном определении двух форм колебаний при одной частоте может быть найдено экспериментальное значение параметра механического взаимодействия b_{11} .

Таким образом, показано, что в литературе преобладают аналитические методы оценки параметров механического взаимодействия b_{ij} . Попытки разработки экспериментальных способов их определения не развивались и находятся в зачаточном состоянии.

В целом в настоящее время существуют подходы, позволяющие определить все параметры мезо-модели КМ (12).

Постановка задач и их решение

Математическая формулировка статических и динамических задач в структурной теории термоупругости КМ отличается от постановки для однородных сред тем, что краевые и начальные условия должны быть заданы для каждой компоненты КМ [39].

Так, например, в каждой точке X_S наружной поверхности S исследуемого тела в обобщенной на двухкомпонентные среды первой краевой задаче задаются перемещения

$$u_i^\alpha = v_i^\alpha(X_S, t), X_S \in S, t \geq t_0; \quad (18^a)$$

во второй краевой задаче – напряжения

$$\sigma_{ij}^\alpha n_j = p_i^\alpha(X_S, t), X_S \in S, t \geq t_0. \quad (18^b)$$

Здесь n_j – компоненты направляющего вектора нормали к поверхности S в точке X_S ; t_0 – начальный момент времени. Могут встретиться смешанные краевые задачи различных типов.

Аналогично формулируются температурные краевые задачи с начальными условиями. При решении динамических задач в начальный момент времени t_0 в каждой точке исследуемого тела должны быть заданы перемещения $u_i^\alpha(X, t_0)$, скорости $u_{i,t}^\alpha(X, t_0)$, а также температура $T^\alpha(X, t_0)$ для каждой компоненты КМ ($\alpha = 1, 2$).

Разрешающие уравнения. В приложениях используются вариационные методы решения краевых задач, в основу которых положено уравнение баланса энергии. В двухкомпонентной среде в соответствии с уравнением баланса изменения

– кинетической энергии

$$2K = \int_{\Omega} \rho^{\alpha\beta} u_{i,t}^\alpha u_{i,t}^\beta d\Omega;$$

– изотермической потенциальной энергии

$$2W = \int_{\Omega} c_{ijmn}^{\alpha\beta} \varepsilon_{ij}^\alpha \varepsilon_{mn}^\beta d\Omega;$$

– тепловой энергии

$$2P = \int_{\Omega} c^\alpha (T^\alpha)^2 / T_0^\alpha d\Omega,$$

а также потери из-за вязких и механических трений

$$\Lambda = \int_{\Omega} \left[g_{ij} (u_i^{\alpha} - u_i^{\beta})_{,t} (u_j^{\alpha} - u_j^{\beta})_{,t} + b_{ij} (u_i^{\alpha} - u_i^{\beta}) (u_j^{\alpha} - u_j^{\beta}) \right] d\Omega$$

и тепловые потери

$$\chi_T = \int_{\Omega} \lambda_{ij}^{\alpha} T_{,i}^{\alpha} T_{,j}^{\alpha} / T_0^{\alpha} d\Omega$$

обусловлены массовыми силами X_i^{α} , поверхностными нагрузками P_i^{α} , внутренними источниками тепла W^{α} и распределениями тепловых потоков $T_{,i}^{\alpha}$ и температуры T^{α} на поверхности исследуемого тела.

Уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda + \frac{\partial P}{\partial t} + \chi_T = \int_{\Omega} X_i^{\alpha} u_{i,t}^{\alpha} d\Omega + \int_S P_i^{\alpha} u_{i,t}^{\alpha} dS + \int_{\Omega} \frac{T^{\alpha} W^{\alpha}}{T_0^{\alpha}} d\Omega + \int_S T^{\alpha} q_n^{\alpha} dS. \quad (19)$$

Здесь T_0^{α} – температуры компонентов КМ в начальный момент времени t_0 ; q^{α} – тепловой поток в направлении нормали n к поверхности S в соответствии с законом Фурье.

На основе уравнения баланса энергии (19) доказаны теорема о единственности решения краевых задач в двухкомпонентной среде, теорема о минимуме потенциальной энергии [37], а также методом конечных элементов решен ряд прикладных изотермических задач статики.

Реализация метода конечных элементов в двухкомпонентной среде. Принятая в методе конечных элементов система преобразований и составления условий равновесия каждого элемента [40] использована для получения из уравнения баланса энергии (19) для статических изотермических задач разрешающей системы уравнений относительно неизвестных векторов перемещения $\{U^{\alpha}\}$ α -компоненты КМ в узловых точках

$$\{R^{\alpha}\} = K^{\alpha\beta} \{U^{\beta}\}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (20)$$

Здесь $\{R^{\alpha}\}$ – вектор равнодействующих сил, действующих на α -компоненту КМ в узловой точке; $K^{\alpha\beta}$ – матрица жесткости α -компоненты КМ при $\beta = \alpha$ и матрица жесткости сцепления при $\beta \neq \alpha$.

Разрешающая система уравнений (20) в математическом смысле не отличается от соответствующей системы уравнений для однородной анизотропной среды. Однако, число неизвестных $\{U^{\alpha}\}$ и уравнений в два раза больше, что представляет определенные трудности при применении стандартных методов решения алгебраических уравнений МКЭ, в том числе при решении задач с помощью коммерчески доступных стандартных программ.

При решении системы уравнений (20) приходится формировать три матрицы жесткости K^{11} , K^{22} и $K^{12} = K^{21}$,

в то время как в доступных стандартных программах формируется лишь одна матрица K . Если разрешающее уравнение (20) представить в виде

$$K^{\alpha\alpha} \{U^{\alpha}\} = \{R^{\alpha}\}, \quad \alpha = 1, 2; \quad (21)$$

$$\{R^{\alpha}\} = \{R^{\alpha}\} - K^{\alpha\beta} \{U^{\beta}\} \quad (\beta \neq \alpha), \quad (21^*)$$

то легко видеть, что для решения задачи теории консолидации двух упругих тел можно без принципиальных изменений использовать существующие программы. Задача решается итерационным методом с переуконструированным вектором внешних сил $\{R^{\alpha}\}$ и матрицами жесткости $K^{\alpha\alpha}$ α -компоненты КМ. При этом, конечно, увеличивается требуемое для решения задачи машинное время. Схема решения следующая. Задается в нулевом приближении вектор перемещения $\{U^2\}$ во всех узлах и вычисляется вектор внешних сил $\{R^1\}$ в нулевом приближении. Решение уравнения (21) при $\alpha = 1$ позволяет определить вектор перемещения $\{U^1\}$ во всех узлах и, соответственно, вектор внешних сил $\{R^2\}$ по (21^{*}). Решение уравнения (21) при $\alpha = 2$ позволяет найти значение вектора перемещения $\{U^2\}$ в первом приближении. Итеративный процесс продолжается до получения решения с требуемой точностью. Сходимость метода обеспечена положительной определенностью соответствующего детерминанта и доказанной единственностью решения вариационной задачи. **Пример решения задачи.** Особенности решения краевых задач в двухкомпонентной среде продемонстрируем на примере исследования плоской деформации тела в форме трапеции – модели хвостовика рабочей лопатки вентилятора авиационного двигателя. Ось x_1 совпадает с осью симметрии равнобокой трапеции и направлена от нижнего (большого) основания к верхнему. Ось x_2 расположена вдоль нижнего основания трапеции и образует правостороннюю систему координат $\{x_1, x_2\}$.

Объемные силы X_i^{α} в хвостовике определяются окружной скоростью ω и плотностью $\rho^{\alpha\alpha}$ α -компонента КМ:

$$X_1^{\alpha} = \rho^{\alpha\alpha} \omega^2 x_1; \quad X_2^{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (22)$$

Напряжения σ_{11}^{α} , обусловленные нагрузками σ со стороны профильной части лопатки, действуют в корневом сечении лопатки $x_1 = h$ (h – высота хвостовика) и определяются выражениями:

$$\sigma_{11}^{\alpha} = [v^{\alpha} E^{\alpha} / (v^1 E^1 + v^2 E^2)] \sigma; \quad \sigma_{12}^{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \quad (23)$$

где v^{α} – объемное содержание; E^{α} – модуль упругости α -компоненты КМ. Нагрузка σ на α -компоненту КМ приходится пропорционально ее жесткости.

Основание хвостовика $x_1 = 0$ свободно от нагрузок

$$\sigma_{11}^{\alpha} = \sigma_{12}^{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (24)$$

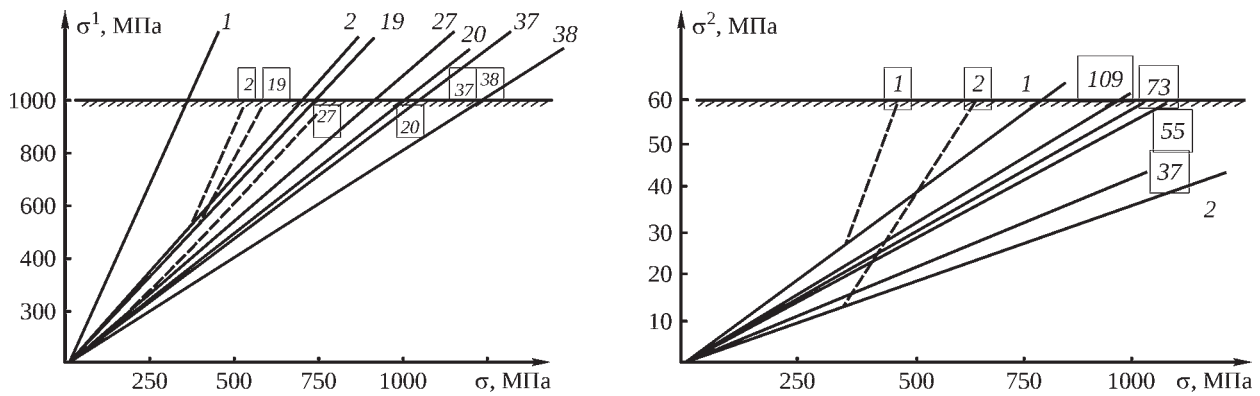


Рис. 3. Зависимости напряжений в волокнах σ^1 и в матрице σ^2 хвостовика рабочей лопадки от нагрузки σ

Боковые поверхности хвостовика ($x_2 = \pm kx_1 + b$) считаются жестко закрепленными:

$$u_1^\alpha = u_2^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (25)$$

В реальности на боковой поверхности хвостовика выполняются контактные условия. Условия (25) являются консервативными и обеспечивают повышенные значения запасов прочности.

Соответствующие уравнения решены описанным выше численным методом (см. соотношения (21)) применительно к хвостовику лопадки, изготовленной из стеклопластика со свойствами, приведенными в таблице при $\nu^1 = 0,6$ ($\nu^2 = 0,4$). Для оценки прочности компонентов КМ и границы их раздела использован энергетический критерий разрушения. Соотношения (1) и (4) в этом случае трансформируются в условия

$$c^\alpha \sigma_b^\alpha = (s_{ij}^\alpha s_{ij}^\alpha)^{0,5}; \quad s_{ij}^\alpha = \sigma_{ij}^\alpha - \sigma_{ij}^\alpha \delta_{ij} / 3;$$

$$c^a \sigma_b^a = (s_{ij}^a s_{ij}^a)^{0,5}; \quad s_{ij}^a = \sigma_{ij}^a - \sigma_{ij}^a \delta_{ij} / 3; \quad \sigma_{ij}^a = \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2, \quad (26)$$

где σ_b^α – предел прочности α -компонента стеклопластика; σ_b^a – адгезионная прочность; δ_{ij} – символ Кронекера. При расчетах принято $\sigma_b^1 = 1$ ГПа; $\sigma_b^2 = 60$ МПа; $\sigma_b^a = 15$ МПа.

Результаты численных расчетов (рис. 3) показывают, что наиболее нагруженным элементом является наполнитель, и при нагрузке $\sigma = 350$ МПа в одном из конечных элементов наполнителя достигается предельное напряжение. Соотношения (26) и (5) фиксируют зарождение повреждения в виде разрыва волокна в приграничной области. Дальнейшие вычисления выполняются в предположении о том, что этот элемент не несет нагрузку. При увеличении нагрузки происходит перераспределение напряжений, и наблюдавшийся ранее линейный закон роста напряжений при увеличении нагрузки становится нелинейным (пунктирная линия). При достижении нагрузки $\sigma = 430$ МПа в первом элементе материала матрицы напряжение становится предельным – зарождается трещина в материале матрицы. При достижении нагрузки $\sigma = 470$ МПа

разрушается второй элемент наполнителя. Подобные расчеты могут быть выполнены до исчерпания несущей способности хвостовика. Описываемые вычисления велись до уровня номинальных напряжений $\sigma = 510$ МПа, пока происходил медленный рост числа повреждений. При нагрузке $\sigma > 510$ МПа процесс накопления повреждений становится неустойчивым.

При запасе прочности 1,45 в хвостовике нет каких-либо повреждений. Если запас прочности будет меньшим, то хвостовик может содержать начальные повреждения. Представленные материалы позволяют оценить уровень нагрузок, который инициирует появление первых эксплуатационных повреждений. Более того, разработанный численный метод позволяет описать процесс развития и накопления повреждений вплоть до исчерпания несущей способности.

Заключение

Экспериментальными наблюдениями установлено, что разрушение КМ не является единовременным актом, а представляет собой процесс зарождения, развития и накопления повреждений до исчерпания несущей способности.

Разработана мезо-модель КМ, применение которой позволяет охватить всю цепочку развития событий при разрушении: зарождение повреждения, перераспределение напряжений в окрестности зародившегося повреждения, появление новых повреждений и их развитие до момента критического роста – исчерпания несущей способности.

Разработанная модель нуждается в развитии в части:

- экспериментального определения параметров для различных КМ;
- формирования критериев адгезионной прочности для КМ с различной структурой армирования;
- совершенствования экспериментальных методов определения как параметров модели, так и условий зарождения повреждений.

Литература

1. Биргер И.А. Об одном критерии разрушения и пластичности // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1977. № 4. С. 143–150.
2. Разрушение // под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. Т.1. 560 с.
3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
5. Tsai S.W. Strength Characteristics of Composite Materials. NASA, 1965. CR-224.
6. Azzi V.D., Tsai S.W. J. Experimental Mechanics, 1965. No. 5. 283 p.
7. Tsai S.W., Wu E.M. J. Composite Material, 1971. No. 5. 58 p.
8. Chamis C.C. Failure Criteria for Filamentary Composites. 1969. NASA-TN-5367.
9. Hoffman O. J. Composite Material, 1967. No. 1. 200 p.
10. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
11. Каримбаев Т.Д. Вариант теории армированных сред // Изв. АН Каз. ССР, серия физ-мат., 1974. № 3. С. 18–24.
12. Каримбаев Т.Д. Структурная теория прочности композиционных материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1977. № 2. С. 149–153.
13. Скворцов Ю.В. Механика композиционных материалов. Самара, 2013. 94 с.
14. Satoa Y., Okabea T., Higuchia R., Yoshiokab K. Multiscale Approach to Predict Crack Initiation in Unidirectional off-axis Laminates // Adv. Comp. Mater., 2014. Vol. 23. No. 5–6. P. 461–475.
15. Lamon J. Probabilistic-Statistical Approach to the Mechanical Behavior of Ceramic Matrix Composites (CMCs) // Advanced Composite Materials, 1999. Vol. 8. No. 1. P. 97–106.
16. Каримбаев Т.Д. Оценка разрушения структурных элементов композиционного материала // Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении, Вып. 1, Труды ЦИАМ № 887, 1980. С. 151–161.
17. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1975. 415 с.
18. Байшагиров Х.Ж., Каримбаев Т.Д. Двухкомпонентная теория упругости неоднородной среды / Монография. Караганда, 2016. 270 с.
19. Каримбаев Т.Д. Основные соотношения механики двухкомпонентной среды и способы определения их параметров. М.: Труды ЦИАМ № 1119, 1985. 23 с.
20. Хашин З., Розен Б.В. Упругие модули материалов, армированных волокнами // Прикладная механика. Тр. Америк. Общества инж.-механиков. Серия У, 2, 1964. С. 104–126.
21. Аболиньш Д.С. Тензор податливости однонаправленно-армированного упругого материала // Механика полимеров, 1965. № 4. С. 47–52.
22. Болотин В.В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов / В кн. «Расчеты на прочность». М., 1965. С. 3–31.
23. Рахматуллин Х.А. Основы газодинамики взаимно-проникающих движений сжимаемых сред // Прикладная математика и механика, 1956. Т. 20. № 2. С. 134–145.
24. Yew C.H., Jogi P.N. The Determination of Biot's Parameters for Sandstones // Part 1: static tests. Experimental Mechanics, 1978. p. 167–172.
25. Yew C.H., Jogi P.N. Study of Wave Motions in Fluid-Saturated Porous Rocks // Acoust. Soc. Am., 1976. Vol. 60. No. 1. p. 2–8.
26. Каримбаев Т.Д. Распространение волн в армированных средах / В кн. «Всесоюзная конференция по механике сплошных сред», Аннотация докладов. Ташкент, 1979. С. 73.
27. Mc Niven H.D., Mengi Y.A. Mathematical Model for the Linear Dynamic Behavior of Two Phase Periodic Materials // Intern. J. Solids Structures, 1979. Vol. 15. P. 271–280.
28. Mc Niven H.D., Mengi Y.A. Mixture Theory for Elastic Laminated Composites // Intern. J. Solids Structures, 1979. Vol. 15. P. 281–302.
29. Mc Niven H.D., Mengi Y.A. Propagation of Transient Waves in Elastic Laminated Composites // Intern. J. Solids Structures, 1979. Vol. 15. P. 303–318.
30. Био М.А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды // Механика, Сб. переводов иностр. лит-ры, 1956. № 1(35). С. 140–146.
31. Fatt J. The Biot-Willes Elasticity Coefficients for a Sandstone // J. Applied Mechanics, 1959. Vol. 26. No. 1. P. 32–40.

-
32. Stern M., Bedford A. A Wave Propagation in Elastic Laminated Using a Multi-Continuum Theory // *Acta Mechanica*, 1972. Vol. 15. P. 21–38.
 33. Murakamu H. and etc. Mixture Theory with a Director for Linear Elastodynamics of Periodically Laminated Media // *Intern. J. Solids Structures*, 1981. Vol. 17. P. 155–173.
 34. Murakamu H. and etc. Mixture Theory for Longitudinal Wave Propagation in Unidirectional Composites with Cylindrical Fibers of Arbitrary Cross Section // *Intern. J. Solids Structures*, 1979. Vol. 15. No. I. P. 325–334. No. II. P. 335–337.
 35. Хорошун Л.П. К теории взаимопроникающих упругих смесей // *Прикладная механика*, 1977. Т. XIII. № 10. С. 124–132.
 36. Хорошун Л.П. Об определении коэффициента взаимопроникания в двухфазных упругих телах // *Доклады АН УССР, серия А. Физ.-мат. и техн. науки*, 1979. № 7. С. 541–544.
 37. Хорошун Л.П. О силе межфазового взаимодействия в теории упругих смесей // *Прикладная механика*, 1982. Т. XIII. № 5. С. 23–29.
 38. Каримбаев Т.Д., Байшагиров Х.Ж. Некоторые вопросы динамики структурной теории армированных сред // *Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении*, Вып. 2, Труды ЦИАМ № 996, 1982. С. 167–176.
 39. Каримбаев Т.Д. Подходы при моделировании деформаций композиционных материалов // *Журнал «Космонавтика и ракетостроение»*, Королев, 2009. № 1(54). С. 91–102.
 40. Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород. Каз. ССР, Алма-Ата: Наука, 1975. 237 с.

References

1. Birger I.A. Ob odnom kriterii razrusheniia i plastichnosti [About one criterion of fracture and plasticity]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of rigid body], 1977. No. 4. P. 143–150.
2. *Razrushenie* [Fracture]. Edited by G. Libovits. Moscow: Mir publ., 1975. Vol. 1. 560 p.
3. Cherepanov G.P. *Mekhanika khрупkogo razrusheniia* [Mechanics of brittle fracture]. Moscow: Nauka publ., 1974. 640 p.
4. Rabotnov Iu.N. *Vvedenie v mekhaniku razrusheniia* [Introduction in fracture mechanics]. Moscow: Nauka publ., 1987. 80 p.
5. Tsai S.W. *Strength Characteristics of Composite Materials*. NASA, 1965. CR-224.
6. Azzi V.D., Tsai S.W. *J. Experimental Mechanics*, 1965. No. 5. 283 p.
7. Tsai S.W., Wu E.M. *J. Composite Material*, 1971. No. 5. 58 p.
8. Chamis C.C. *Failure Criteria for Filamentary Composites*. 1969. NASA-TN-5367.
9. Hoffman O. *J. Composite Material*, 1967. No. 1. 200 p.
10. Khill R. *Matematicheskaia teoriia plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow: Gostekhizdat publ., 1956. 407 p.
11. Karimbaev T.D. *Variante teorii armirovannykh sred* [Variant of reinforced mediums theory] *Izv. AN Kaz. SSR*, 1974. No. 3, P. 18–24.
12. Karimbaev T.D. *Strukturalnaia teoriia prochnosti kompozitsionnykh materialov* [Structural theory of composite materials strength]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1977. No. 2. P. 149–153.
13. Skvortsov Iu.V. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Samara, 2013. 94 p.
14. Satoa Y., Okabea T., Higuchia R., Yoshiokab K. Multiscale Approach to Predict Crack Initiation in Unidirectional off-axis Laminates // *Adv. Comp. Mater.*, 2014. Vol. 23. No. 5–6. P. 461–475.
15. Lamon J. *Probabilistic-Statistical Approach to the Mechanical Behavior of Ceramic Matrix Composites (CMCs)* // *Advanced Composite Materials*, 1999. Vol. 8. No. 1. P. 97–106.
16. Karimbaev T.D. *Otsenka razrusheniia strukturnykh elementov kompozitsionnogo materiala* [Fracture estimation of structural elements of composite material]. *Problemy prochnosti i dinamiki v aviadvigatelistroenii* [Problem of strength and dynamics in aircraft engine industry]. *Trudy TsIAM*, 1980. Issue 1. No. 887. P. 151–161.
17. Lekhnitskii S.G. *Teoriia uprugosti anizotropnogo tela* [Elasticity theory of anisotropic body]. Moscow: Nauka publ., 1975. 415 p.
18. Baishagiroy Kh.Zh., Karimbaev T.D. *Dvukhkomponentnaia teoriia uprugosti neodnorodnoi sredy* [Two-component elasticity theory of nonhomogeneous medium]. *Monografiia* [Monograph]. Karaganda, 2016. 270 p.

-
19. Karimbaev T.D. Osnovnye sootnosheniia mekhaniki dvukhkomponentnoi sredy i sposoby opredeleniia ikh parametrov [Basic relations of two-component medium mechanics and method of its parameter determination]. Moscow: Trudy TsIAM, 1985. No. 1119. 23 p.
 20. Khashin Z., Rozen B.V. Uprugie moduli materialov, armirovannykh voloknami [Elastic modulus of fiber reinforced materials]. Prikladnaia mekhanika [Applied mechanics]. Tr. Amer. Obshchestva inzh.-mekhanikov, 1964. Issue U. P. 104–126.
 21. Abolin'sh D.S. Tenzor podatlivosti odnonapravlenno-armirovannogo uprugogo materiala [Flexibility tensor of unidirectional reinforced elasticity material]. Mekhanika polimerov, 1965. No. 4. P. 47–52.
 22. Bolotin V.V. Ploskaia zadacha teorii uprugosti dlia detalei iz armirovannykh materialov [Plane elastic problem for details made of reinforced material]. Book «Raschety na prochnost». Moscow, 1965. P. 3–31.
 23. Rakhmatullin Kh.A. Osnovy gazodinamiki vzaimno-proniknuiushchikh dvizhenii szhimaemykh sred [Fundamental gas-dynamics interpenetrating motions of compressible medium]. Prikladnaia matematika i mekhanika, 1956. Vol. 20. No. 2. P. 134–145.
 24. Yew C.H., Jogi P.N. The Determination of Biot's Parameters for Sandstones // Part 1: static tests. Experimental Mechanics, 1978. P. 167–172.
 25. Yew C.H., Jogi P.N. Study of Wave Motions in Fluid-Saturated Porous Rocks // Acoust. Soc. Am., 1976. Vol. 60. No. 1. P. 2–8.
 26. Karimbaev T.D. Rasprostranenie voln v armirovannykh sredakh [Waves propagation in reinforced mediums]. Proc. «Vsesoiuznaia konferentsiia po mekhanike sploshnykh sred», Tashkent, 1979. P. 73.
 27. Mc Niven H.D., Mengi Y.A. Mathematical Model for the Linear Dynamic Behavior of Two Phase Periodic Materials // Intern. J. Solids Structures, 1979. Vol. 15. P. 271–280.
 28. Mc Niven H.D., Mengi Y.A. Mixture Theory for Elastic Laminated Composites // Intern. J. Solids Structures, 1979. Vol. 15. P. 281–302.
 29. Mc Niven H.D., Mengi Y.A. Propagation of Transient Waves in Elastic Laminated Composites // Intern. J. Solids Structures, 1979. Vol. 15. P. 303–318.
 30. Bio M.A. Teoriia uprugosti i konsolidatsii anizotropnoi poristoi sredy [Elasticity and consolidation theory of anisotropic porous medium]. Sbornok perevodov inostr. lit-ry, Mekhanika, 1956. No. 1(35). P. 140–146.
 31. Fatt J. The Biot-Willes Elasticity Coefficients for a Sandstone // J. Applied Mechanics, 1959. Vol. 26, No. 1. P. 32–40.
 32. Stern M., Bedford A. A Wave Propagation in Elastic Laminated Using a Multi-Continuum Theory // Acta Mechanica, 1972. Vol. 15. P. 21–38.
 33. Murakamu H. and etc. Mixture Theory with a Director for Linear Elastodynamics of Periodically Laminated Media // Intern. J. Solids Structures, 1981. Vol. 17. P. 155–173.
 34. Murakamu H. and etc. Mixture Theory for Longitudinal Wave Propagation in Unidirectional Composites with Cylindrical Fibers of Arbitrary Cross Section // Intern. J. Solids Structures, 1979. Vol. 15. No. I. P. 325–334. No. II. P. 335–337.
 35. Khoroshun L.P. K teorii vzaimoproniknuiushchikh uprugikh smesei [Add to theory of interpenetrating elastic mixtures]. Prikladnaia mekhanika, 1977. Vol. XIII. No. 10. P. 124–132.
 36. Khoroshun L.P. Ob opredelenii koeffitsienta vzaimoproniknuiiia v dvukhfaznykh uprugikh telakh [About interpenetration coefficient determination in two-phase elastic body]. Doklady AN USSR, series A. Fiz-mat. i tekhn. nauki, 1979. No. 7. P. 541–544.
 37. Khoroshun L.P. O sile mezhfazovogo vzaimodeistviia v teorii uprugikh smesei [About interphase interaction force in theory of elastic mixtures]. Prikladnaia mekhanika, 1982. Vol. XIII. No. 5. P. 23–29.
 38. Karimbaev T.D., Baishagirov Kh.Zh. Nekotorye voprosy dinamiki strukturnoi teorii armirovannykh sred [Some questions of dynamics structural theory of reinforced medium]. Problemy prochnosti i dinamiki v aviadvigatelistroenii [Problem of strength and dynamics in aircraft engine industry]. Trudy TsIAM, 1982. Issue 2. No. 996. P. 167–176.
 39. Karimbaev T.D. Podkhody pri modelirovanii deformatsii kompozitsionnykh materialov [Approaches at modeling of composite material deformation]. Journal «Kosmonavtika i raketostroenie», Korolev, 2009. No. 1(54). P. 91–102.
 40. Erzhanov Zh.S., Karimbaev T.D. Metod konechnykh elementov v zadachakh mekhaniki gornykh porod [Finite element method in rock mechanics problems]. Kaz. SSR, Alma-Ata: Nauka publ., 1975. 237 p.
-